아르키메데스와 포물선의 특성

제 1회 무등수학 강연회

김 동수

전남대학교

2011년 9월 30일

차 례

1 아르키메데스의 업적
2 구의 부피와 겉넓이
3 포물선 절단부의 넓이
4 포물면의 절단부
5 포물선의 특성
6 포물면의 특성
7 특성 증명
8 참고문헌

아르키메데스의 업적

Figure: 삽화: 연구하는 할아버지

아르키메데스의 업적

- 기원전 287년-212년: 약 2300년전 출생.
- 철학자, 수학자, 공학자
- 무게중심, 평형, 유체역학, 조선공학
- 나선 양수기, 대형 함선 건조, 아르키메데스 거울, 유레카, 원주율의 계산 등
- 구의 부피와 겉넓이
- 포물선 절단부의 넓이
- 포물면 절단부의 부피
- 참고문헌:
  Sherman Stein, What did he do besides cry Eureka?, MAA.
  이우영 옮김, 아르키메데스, 경문사.
  위키백과

스타인의 책

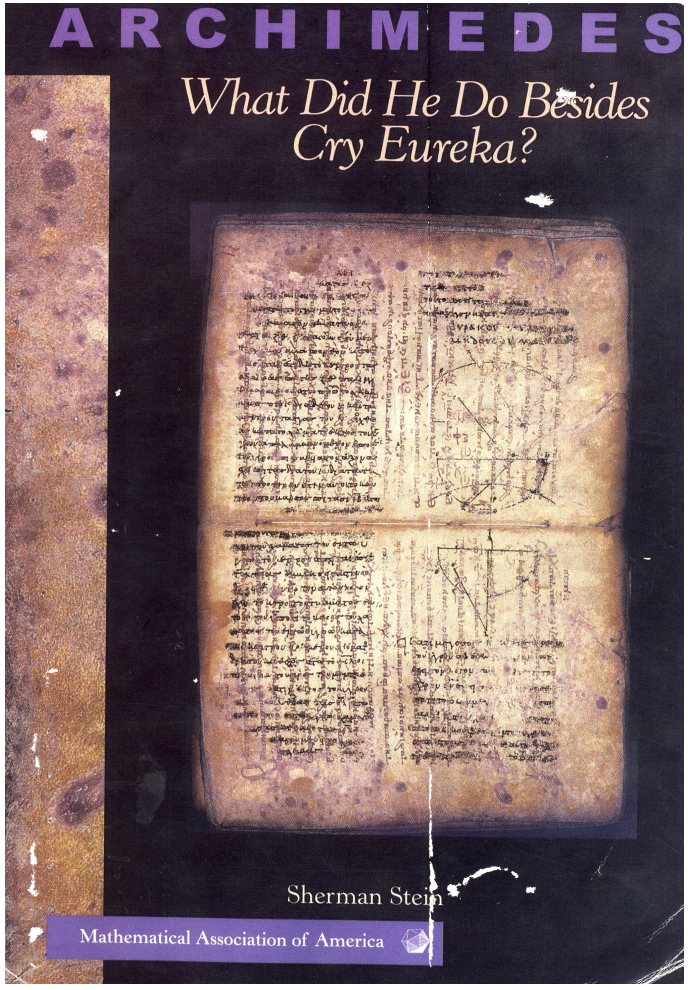
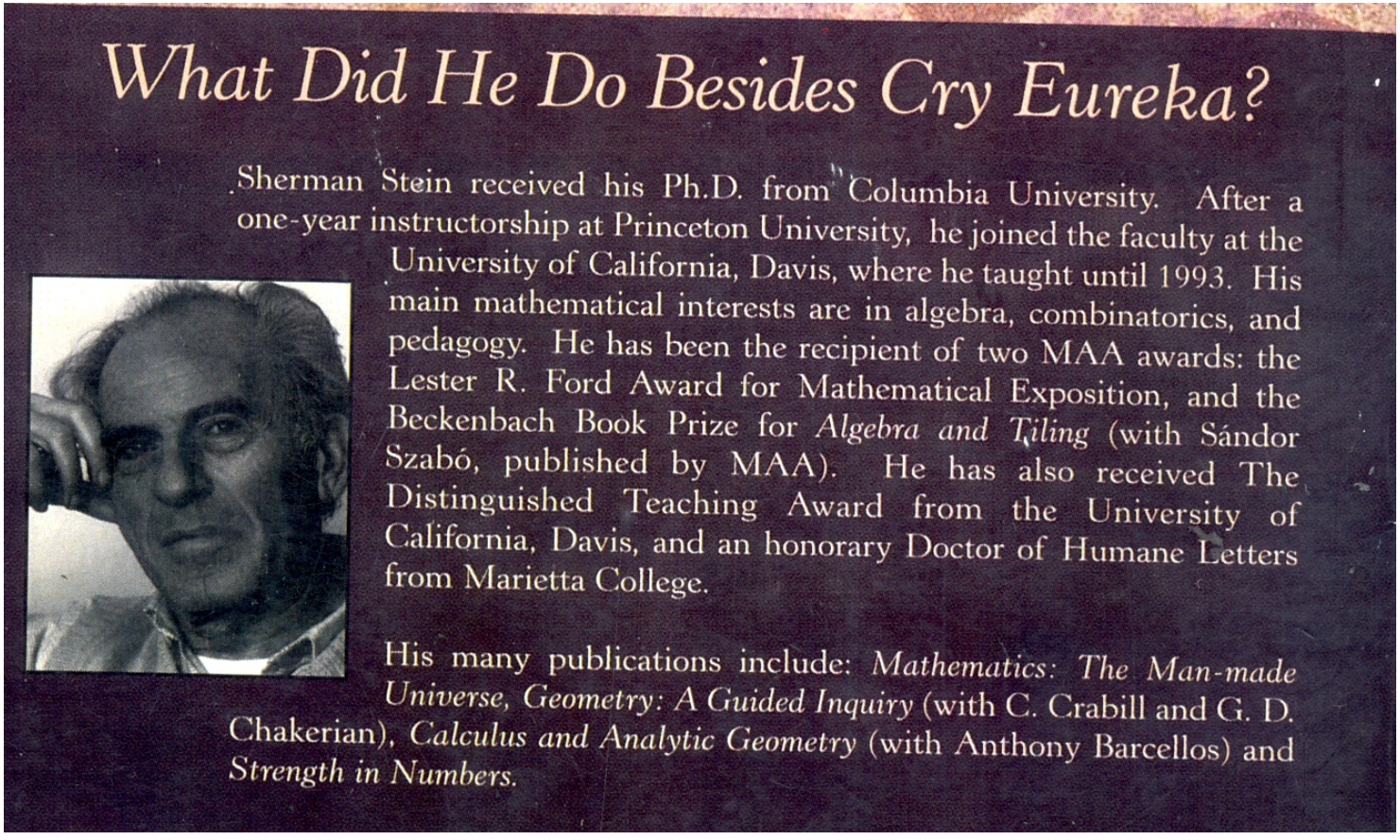


Figure: The Method, 팰림프세스트, 1906, 이스탄불, 하이베르그

스타인



What Did He Do Besides Cry Eureka?

Sherman Stein received his Ph.D. from Columbia University. After a one-year instructorship at Princeton University, he joined the faculty at the University of California, Davis, where he taught until 1993. His main mathematical interests are in algebra, combinatorics, and pedagogy. He has been the recipient of two MAA awards: the Lester R. Ford Award for Mathematical Exposition, and the Beckenbach Book Prize for *Algebra and Tiling* (with Sándor Szabó, published by MAA). He has also received The Distinguished Teaching Award from the University of California, Davis, and an honorary Doctor of Humane Letters from Marietta College.

His many publications include: *Mathematics: The Man-made Universe*, *Geometry: A Guided Inquiry* (with C. Crabill and G. D. Chakerian), *Calculus and Analytic Geometry* (with Anthony Barcellos) and *Strength in Numbers*.

Figure: 셔먼 스타인

아르키메데스의 증명 도구: 지렛대의 원리

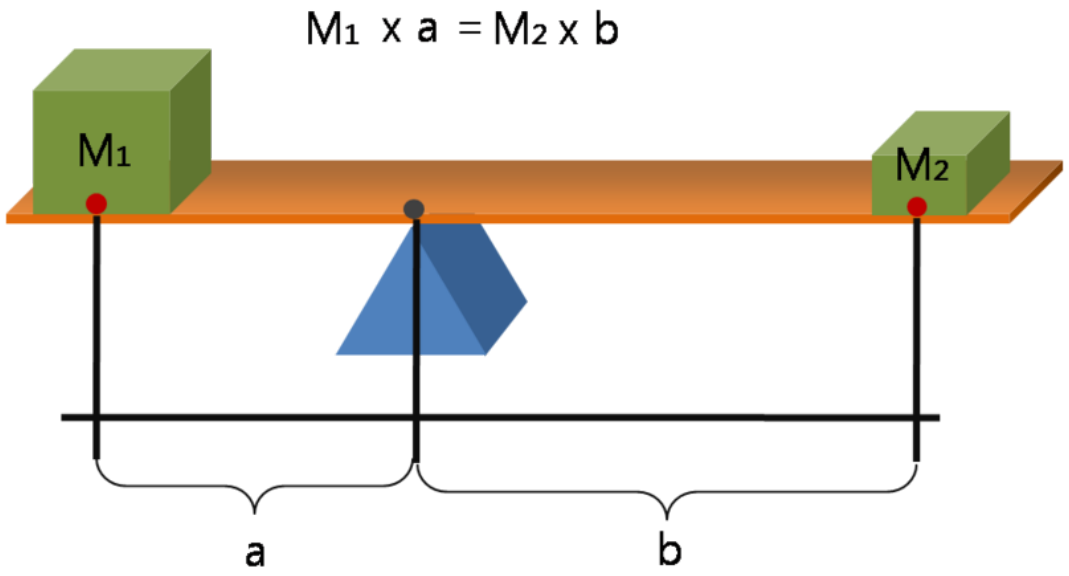


Figure: 지렛대의 원리

- 거의 모든 분야에서 지렛대의 원리를 활용함

차 례

1 아르키메데스의 업적

2 구의 부피와 겉넓이

3 포물선 절단부의 넓이

4 포물면의 절단부

5 포물선의 특성

6 포물면의 특성

7 특성 증명

8 참고문헌

원기둥에 내접하는 구

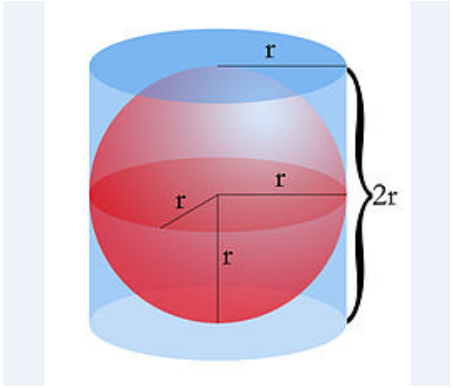


Figure: 비석에 새겨진 그림

- 구의 부피

$$\frac{\text{구의 부피}}{\text{원기둥의 부피}} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\pi r^2 \times 2r} = \frac{2}{3}.$$

- 구의 겉넓이

$$\frac{\text{구의 겉넓이}}{\text{원기둥의 겉넓이}} = \frac{4\pi r^2}{\pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r \times 2r} = \frac{2}{3}.$$

구의 겉넓이

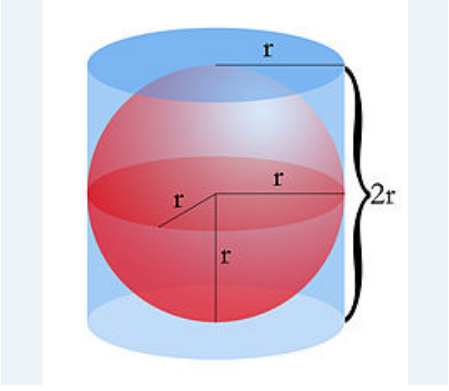


Figure: 비석에 새겨진 그림

- 구의 겉넓이

$$\frac{\text{구의 겉넓이}}{\text{원기둥의 겉넓이}} = \frac{4\pi r^2}{\pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r \times 2r} = \frac{2}{3}.$$

- (아르키메데스 정리, 등적도법의 원리)
  구를 간격이 h인 두 평면으로 자르면 가운데 부분의 겉넓이는 항상 같다 $(2\pi rh)$.

구면의 특성

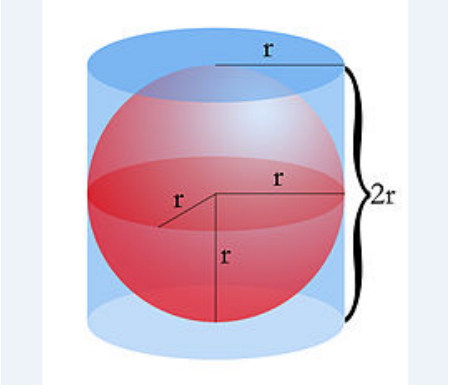


Figure: 비석에 새겨진 그림

- 질문 1. 볼록 곡면 S 를 간격이 h인 두 평면으로 자를 때 가운데 부분의 겉넓이가 항상 같다면 S는 구면인가?
- 정리 1 (김, 김). 볼록 곡면 S 를 간격이 h인 두 평면으로 자를 때 가운데 부분의 겉넓이가 항상 같다면 S는 구면이다.

차 례

1 아르키메데스의 업적

2 구의 부피와 겉넓이

3 포물선 절단부의 넓이

4 포물면의 절단부

5 포물선의 특성

6 포물면의 특성

7 특성 증명

8 참고문헌

포물선 절단부의 넓이

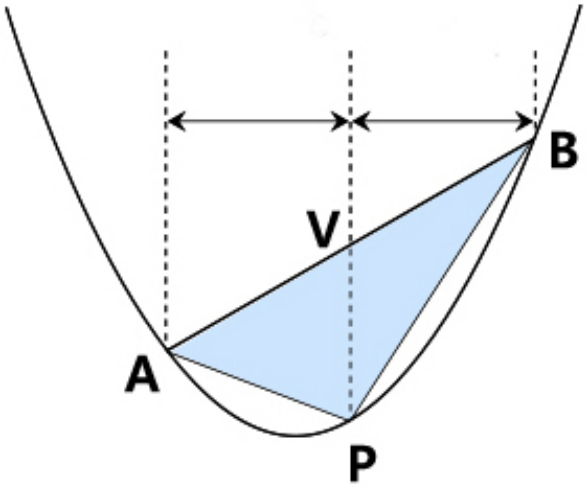


Figure: 포물선의 절단부

- 아르키메데스 정리

$$\frac{\text{절단부의 넓이}}{\text{삼각형의 넓이}} = \frac{4}{3}$$

포물선 절단부의 넓이

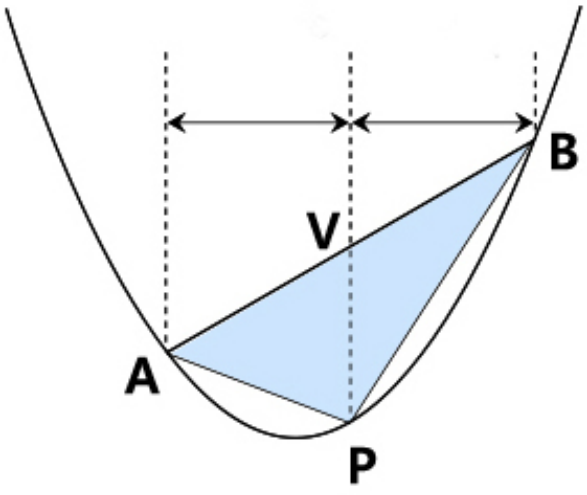


Figure: 포물선의 절단부

- 포물선 $y = ax^2$ 위의 두 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 에 대하여, 접선이 직선 AB와 나란한 점 $P(x_3, y_3)$를 구하면 $x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$ 이다.
- P 를 지나고 축과 나란한 직선이 현 AB와 만나는 점 V는 AB의 중점이다.

포물선 절단부의 넓이

- PV 의 길이는 다음과 같다.

$$PV = \frac{a}{4}(x_2 - x_1)^2.$$

- 삼각형 ABP의 넓이는 다음과 같다.

$$\Delta ABP = \frac{a}{8}(x_2 - x_1)^3.$$

- 절단부의 넓이= 사다리꼴의 넓이 - 포물선 아래부분의 넓이

$$\frac{1}{2}(x_2 - x_1)(ax_2^2 + ax_1^2) - \int_{x_1}^{x_2} ax^2 dx = \frac{a}{6}(x_2 - x_1)^3.$$

포물선 절단부의 넓이

- 아르키메데스는 다음을 증명하였다.
- 절단부의 넓이는 $PV^{3/2}$에 비례한다.
  실제로 다음이 성립한다.

$$\text{절단부의 넓이} = \frac{4}{3\sqrt{a}} \times PV^{3/2}.$$

- 절단부의 넓이는 삼각형 ABP의 넓이의 $\frac{4}{3}$이다.

$$\text{절단부의 넓이} = \frac{4}{3} \times \Delta ABP.$$

포물선 절단부의 넓이, 아르키메데스의 방법

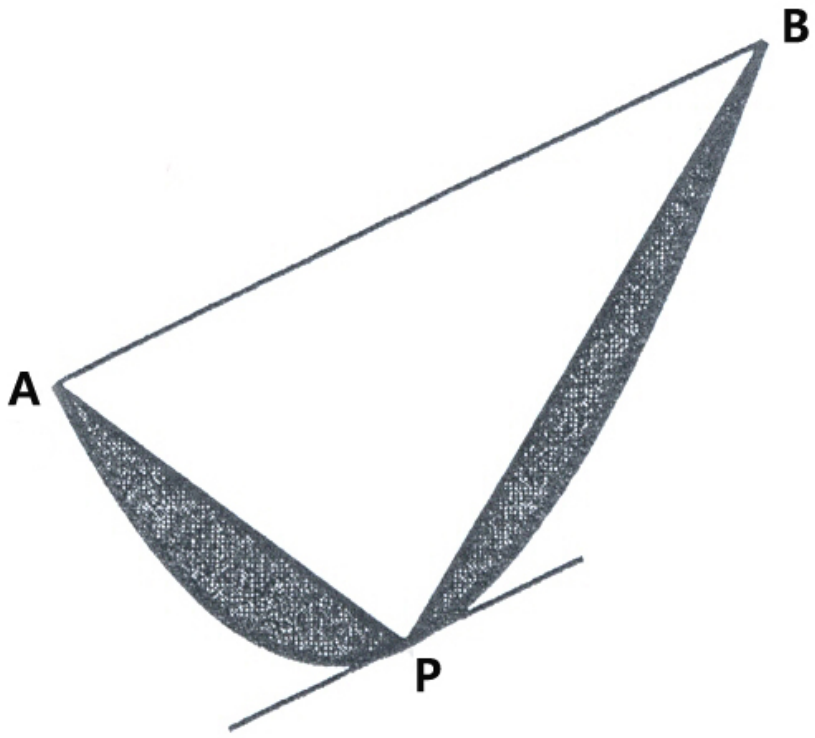


Figure: 포물선의 절단부

포물선 절단부의 넓이, 아르키메데스의 방법

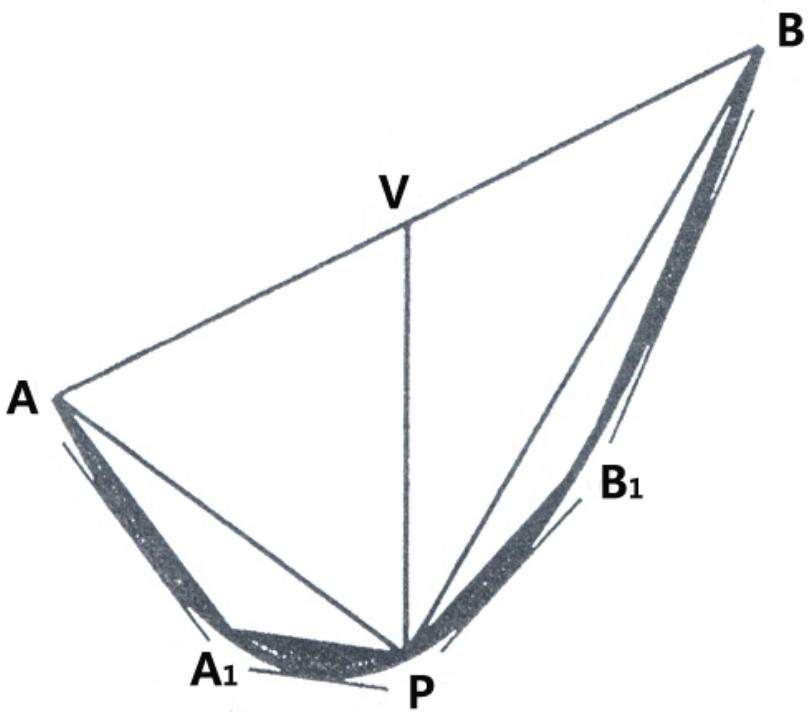


Figure: 포물선의 절단부

아르키메데스의 두가지 증명 방법

- 아르키메데스의 두가지 증명 방법
- 역학에 의한 넓이
(지렛대의 원리 이용)
- 기하학에 의한 넓이
절단부를 삼각형들로 근사함.
- 무한 등비급수의 합을 구하고 이용.

$$\text{절단부의 넓이} = \Delta ABP\{1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\} = \frac{4}{3} \times \{\Delta ABP\}.$$

아르키메데스의 증명 방법

- 무한 등비급수의 합

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{4}{3}.$$

- 아르키메데스는 다음 식을 증명하고 이용.

$$(1)\quad 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4^n}=\frac{4}{3}.$$

- (1)의 증명.

$$\frac{1}{4^n}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4^n}=(1+\frac{1}{3})\times\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4^{n-1}}.$$

$$\frac{1}{4^{n-1}}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4^{n-1}}=(1+\frac{1}{3})\times\frac{1}{4^{n-1}}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4^{n-2}}.$$

$$\vdots$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.$$

그림으로 증명하기 (Proofs without words)

- 무한 등비급수의 합 (Mabry, Math. Magazine 1999년 2월호)

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{4}{3}.$$

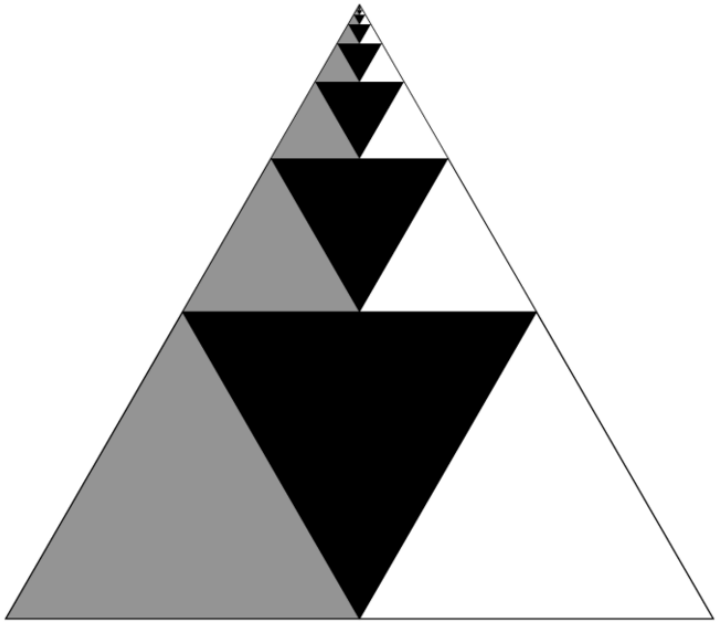


Figure: $\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}+\cdots=\frac{1}{3}$

차 례

1 아르키메데스의 업적

2 구의 부피와 겉넓이

3 포물선 절단부의 넓이

4 포물면의 절단부

5 포물선의 특성

6 포물면의 특성

7 특성 증명

8 참고문헌

회전 포물면의 절단부

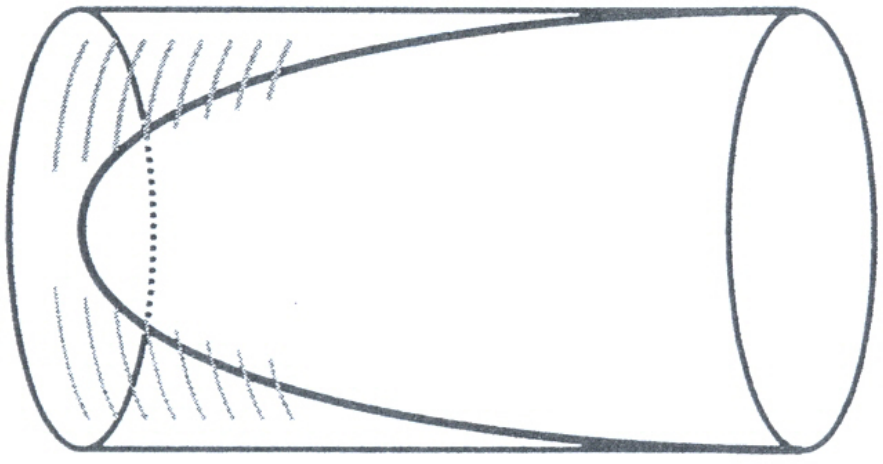


Figure: 회전 포물면의 절단부

- 원기둥과 비교

$$\text{절단부의 부피} = \frac{1}{2} \times \text{원기둥의 부피}$$

포물면의 절단부

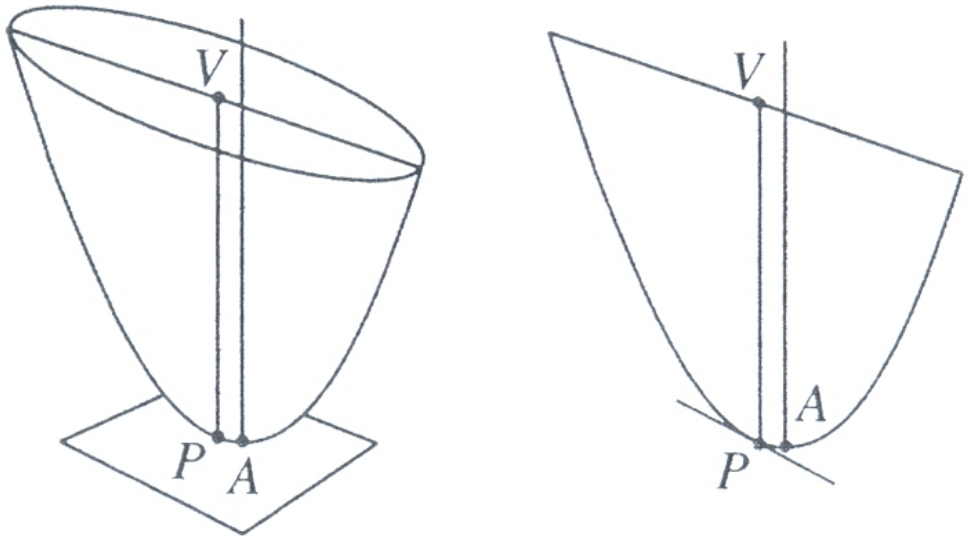


Figure: 포물면의 절단부

- 회전 포물면 $z = a(x^2 + y^2)$ 을 평면 Π 로 자른 절단면은 타원이다. 접평면이 평면 Π 와 나란한 점을 P라 하자.
- P를 지나고 축에 나란한 직선이 평면 Π 와 만나는 점을 V 라 하면 V 는 타원의 중심이다.

포물면의 절단부의 부피

- 아르키메데스는 다음을 증명하였다.
- 절단부의 부피는 PV^2에 비례한다.

$$\text{절단부의 부피} = k \times PV^2.$$

- 절단부의 부피는 타원뿔의 부피의 $\frac{3}{2}$이다.

$$\text{절단부의 부피} = \frac{3}{2} \times \{\text{타원뿔의 부피}\}.$$

$$\text{절단부의 부피} = \frac{1}{2} \times \{\text{타원기둥의 부피}\}.$$

차 례

1 아르키메데스의 업적

2 구의 부피와 겉넓이

3 포물선 절단부의 넓이

4 포물면의 절단부

5 포물선의 특성

6 포물면의 특성

7 특성 증명

8 참고문헌

포물선의 특성

- 질문 2. 다음 성질을 만족하는 볼록 곡선 $C : y = f(x)$는 포물선뿐인가?

- 임의의 점 P에서 접선과 나란한 C 의 현 AB 에 대하여 P 를 지나고 y 축에 나란한 직선이 현 AB 와 만나는 점을 V 라고 하면 다음이 성립한다.

$$\text{절단부의 넓이} = k \times PV^{\frac{3}{2}}.$$

- 질문 3. 다음 성질을 만족하는 볼록 곡선 C는 포물선뿐인가?

- 임의의 점 P 에서 접선과 나란한 C 의 현 AB 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\text{절단부의 넓이} = \frac{4}{3} \times \Delta ABP.$$

- 다음이 성립함을 보일 수 있다.

$$\text{질문 3} \rightarrow \text{질문 2}$$

포물선의 특성

- 정리 2 (김, 김). 다음 성질을 만족하는 볼록 곡선 $C : y = f(x)$는 포물선뿐이다.

- 임의의 점 P에서 접선과 나란한 C 의 현 AB 에 대하여 P 를 지나고 y 축에 나란한 직선이 현 AB 와 만나는 점을 V 라고 하면 다음이 성립한다.

$$\text{절단부의 넓이} = k \times PV^{\frac{3}{2}}.$$

- 정리 3 (김, 김). 다음 성질을 만족하는 볼록 곡선 C는 포물선뿐이다.

- 임의의 점 P에서 접선과 나란한 C 의 현 AB 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\text{절단부의 넓이} = \frac{4}{3} \times \Delta ABP.$$

차 례

1 아르키메데스의 업적

2 구의 부피와 겉넓이

3 포물선 절단부의 넓이

4 포물면의 절단부

5 포물선의 특성

6 포물면의 특성

7 특성 증명

8 참고문헌

포물면의 특성

- 질문 4. 다음 성질을 만족하는 볼록 곡면 $S : z = f(x,y)$는 포물면뿐인가?
- 임의의 점 P에서 접평면과 나란한 S 의 절단 평면 Π 에 대하여 P 를 지나고 z 축에 나란한 직선이 절단 평면 Π 와 만나는 점을 V 라고 하면 다음이 성립한다.

$$\text{절단부의 부피} = k \times PV^2.$$

- 질문 5. 다음 성질을 만족하는 볼록 곡면 S는 포물면뿐인가?
- 임의의 점 P에서 접평면과 나란한 S 의 절단 평면 Π 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\text{절단부의 부피} = \frac{3}{2} \times \text{뿔의 부피}.$$

- 다음이 성립함을 보일 수 있다.

$$\text{질문 5} \rightarrow \text{질문 4}$$

타원포물면의 특성

- 정리 4 (김, 김). 다음 성질을 만족하는 볼록 곡면 $S : z = f(x,y)$는 타원 포물면뿐이다.

- 임의의 점 P에서 접평면과 나란한 S 의 절단 평면 Π 에 대하여 P 를 지나고 z 축에 나란한 직선이 절단 평면 Π 와 만나는 점을 V 라고 하면 다음이 성립한다.

$$\text{절단부의 부피} = k \times PV^2.$$

- 추측. 다음 성질을 만족하는 볼록 곡면 S는 타원 포물면뿐이다.

- 임의의 점 P에서 접평면과 나란한 S 의 절단 평면 Π 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\text{절단부의 부피} = \frac{3}{2} \times \text{뿔의 부피}.$$

차 례

1 아르키메데스의 업적

2 구의 부피와 겉넓이

3 포물선 절단부의 넓이

4 포물면의 절단부

5 포물선의 특성

6 포물면의 특성

7 특성 증명

8 참고문헌

포물선의 특성 증명

- 보조정리 1. 점 P에서 접선과 나란한 C 의 현 AB 에 대하여, h 를 P 에서 현 AB 에 이르는 거리라 하고 다음과 같이 정의하자.

$$S_P(h) = \text{절단부의 넓이}, \quad l_P(h) = \text{현}AB\text{의 길이}.$$

다음 식이 성립한다.

$$S_P'(h) = l_P(h),$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{l_P(h)}{\sqrt{h}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa(P)}}.$$

여기서 $\kappa(P)$ 는 P 에서 곡선 C 의 곡률이다.

- 위 식은 볼록 평면곡선의 곡률에 대한 새로운 해석이다.

$$\kappa(P) = 8\{\frac{dl_P^2(h)}{dh}(0)\}^{-1}.$$

포물선의 특성 증명

- C의 한 점 A를 고정하고 A에서 접선을 x-축으로 하는 좌표계를 생각하면 곡선 C 는 국소적으로 그래프 $y=f(x)$ 가 된다.
- 보조정리 2. 임의의 점 $P(x,f(x))$ 에 대하여, P 에서 접선과 현 AB 가 나란하게 되는 점을 $B(g(x),f(g(x)))$ 라고 하면 다음 식이 성립한다.

$$f(g(x)) = f'(x)g(x),$$

$$g(x)^2 f''(x) = 8\{xf'(x) - f(x)\},$$

$$g(x)^2 f'(x) = \frac{4}{3}\{xf'(x) - f(x)\}g(x) + 2\int_0^{g(x)} f(t)dt.$$

- 증명. P에서 현 AB까지의 거리를 h라고 하면, 가정과 보조정리 1에 의해 다음을 알 수 있다.

$$S_P(h) = \frac{2}{3}hl_P(h), \quad l_P(h) = C(P)\sqrt{h}, \quad C(P) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\kappa(P)}}.$$

이 식들을 이용하여 증명한다.

포물선의 특성 증명

- 정리 3의 증명. 위의 식에서 함수 f를 소거하면 다음 식을 구할 수 있다.

$$g(x)g'(x) - 6g(x) + 8x = 0.$$

이 미분 방정식을 풀면 다음과 같다.

$$g(x) = 2x, \quad 4x, \quad \frac{4cx+1-\sqrt{4cx+1}}{c}.$$

- $g(x) = 2x$이면 $f(x) = ax^2$이므로 C는 포물선이다.
- $g(x) = 4x$이면 $f(x)$는 존재하지 않는다.
- $g(x) = \frac{4cx+1-\sqrt{4cx+1}}{c}$이면
$f(x) = d(2cx+1) - d\sqrt{4cx+1}$이므로 C는 다음의 포물선이다.

$$4c^2d^2x^2 - 4cdxy + y^2 - 2dy = 0.$$

포물면의 특성 증명

- 보조정리 3. 임의의 점 P에서 접평면과 나란한 볼록 곡면 S 의 절단 평면 Π 에 대하여 P 에서 평면 Π 까지의 거리를 h 라고 하면 다음이 성립한다.

$$V_P(h) = \text{절단부의 부피}, \quad A_P(h) = \text{절단면의 넓이},$$

$$V_P'(h) = A_P(h),$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{A_P(h)}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{K(P)}}.$$

  여기서 $K(P)$ 는 P 에서 볼록 곡면 S 의 가우스 곡률이다.

- 위 식은 볼록 곡면의 가우스곡률에 대한 새로운 해석이다.

$$K(P) = \frac{4\pi^2}{\{A_P'(0)\}^2}.$$

- 보조정리 3과 몽쥬 암페어 방정식의 해에 대한 정리를 이용하여 정리 4를 증명할 수있다.

추측에 대하여

- 보조정리 3. 임의의 점 P에서 접평면과 나란한 볼록 곡면 S 의 절단 평면 Π 에 대하여 P 에서 평면 Π 까지의 거리를 h 라고 하면 다음이 성립한다.

$$V_P(h) = \text{절단부의 부피}, \quad A_P(h) = \text{절단면의 넓이},$$

$$V_P'(h) = A_P(h),$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{A_P(h)}{h} = \frac{2\pi}{\sqrt{K(P)}}.$$

여기서 $K(P)$ 는 P 에서 볼록 곡면 S 의 가우스 곡률이다.

- 보조정리 3 외에 참신한 아이디어가 .....

차 례

1 아르키메데스의 업적

2 구의 부피와 겉넓이

3 포물선 절단부의 넓이

4 포물면의 절단부

5 포물선의 특성

6 포물면의 특성

7 특성 증명

8 참고문헌

참고문헌

- 1. 셔먼 시타인 지음, 이우영 옮김, 아르키메데스, 경문사, 서울, 2006.
- 2. do Carmo, M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1976.
- 3. Kim, D.-S. and Kim, Y. H., *Archimedes and a characterization of parabolas*, In preparation.
- 4. Kim, D.-S. and Kim, Y. H., *A characterization of parabolas*, Submitted.
- 5. Kim, D.-S. and Kim, Y. H., *Some characterizations of spheres and elliptic paraboloids*, Submitted.
- 6. Nomizu, K. and Sasaki, T., *Affine differential geometry. Geometry of affine immersions. Cambridge Tracts in Mathematics, 111*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- 7. Stein, S., *What did he do besides cry Eureka?*, MAA, Washington, DC, 1999.

감사

Figure: 무등의 가을

- 감사합니다!!!