

오일러의 볼록다면체 정리의 일반화

김 상 욱

전남대학교

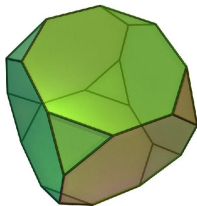
제2회 무등수학 강연회
2011년 11월 4일

- 1 3차원 볼록다면체
- 2 볼록다면체의 면벡터
- 3 볼록다면체의 플래그 벡터
- 4 볼록다면체의 **cd**-지수

3차원 볼록다면체

정의

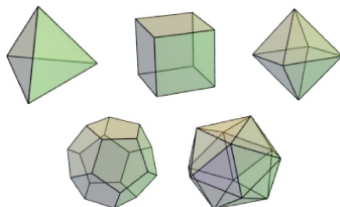
3차원 볼록다면체란 다각형들을 면으로 갖는 내부가 볼록 집합인 입체 도형이다.



3차원 볼록다면체

3차원 정다면체

- 정다면체(플라톤의 다면체)는 고대부터 알려져왔다.



정다면체들

- 피타고라스(Pythagoras, 570-495 BC) - 정4면체, 정6면체, 정12면체
- 테아에테우스(Theaetetus, 417-369 BC) - 정8면체, 정20면체
- 유클리드(Euclid, 365-275 BC) - 정다면체에 대한 완벽한 수학적 기술 (원론 (Elements))

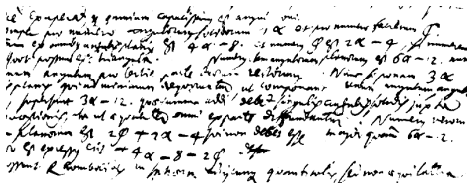
데카르트의 유작(Nachlass)

정리 (데카르트(Descartes, 1596-1650))

3차원 볼록 다면체에서

- v : 꼭지점의 개수
 - f : 면의 개수
 - ρ : 평면각(면 위에 있는 꼭지점들에서의 각)의 개수
- 들은 다음 식을 만족한다.

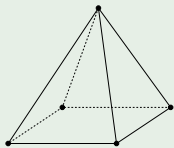
$$\rho = 2v + 2f - 4.$$



Handwritten mathematical notes in Latin, likely a transcription of Descartes' work on polyhedra. The text discusses the relationship between the number of vertices (v), faces (f), and angles (ρ) of a polyhedron. It includes the formula $\rho = 2v + 2f - 4$ and mentions the number of edges (e).

데카르트의 노트를 복사한 라이프니츠의 노트

예제



- $v = 5$
- $f = 5$
- $\rho = 16$

$$\rho = 2v + 2f - 4.$$

모서리의 개수를 이용한 표현

각각의 평면각은 두개의 모서리를 포함하고 있고 각각의 모서리는 네개의 평면각에 포함되므로 ρ 는 모서리의 개수 e 의 두배이다.
그러므로

$$v - e + f = 2.$$

정리 (오일러, 1758)

3차원 볼록다면체의 꼭지점의 개수를 v , 모서리의 개수를 e , 면의 개수를 f 라 하면

$$v - e + f = 2$$

가 성립한다.

- 1750년 Goldbach에게 보낸 편지에서 처음 소개됨.
- 1752/1753년 Petersberg Academy's Proceeding에 소개됨.
- 오일러에 의해 다면체의 **모서리**라는 표현이 처음 사용됨.

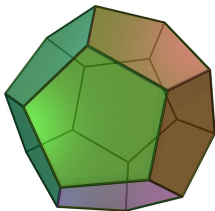
오일러의 정리

오일러 정리의 증명

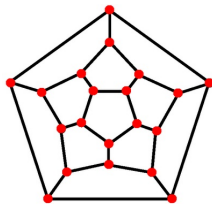
- 3차원 볼록다면체의 꼭지점과 모서리들은 평면그래프를 이룬다.
- 평면그래프가 v 개의 점, e 개의 선분, f 개의 영역을 가지면,

$$v - e + f = 2$$

가 만족됨을 선분의 개수에 관한 수학적 귀납법으로 증명할 수 있다.



볼록다면체



Schlegel 다이어그램

질문

$v - e + f = 2$ 를 만족하는 v, e, f 에 대하여 v 개의 꼭지점, e 개의 모서리, f 개의 면을 갖는 3차원 볼록다면체가 항상 존재하는가?

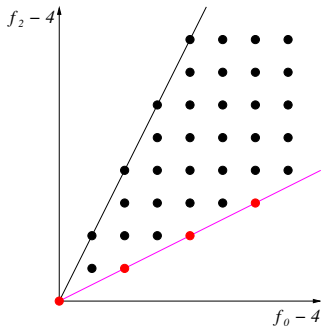
아니다!

정리 (Steinitz, 1906)

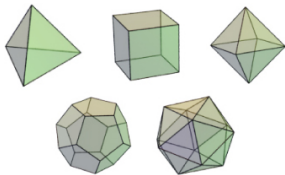
v, e, f 가 각각 3차원 볼록다면체의 꼭지점의 수, 모서리의 수, 면의 수가 되기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

- $v - e + f = 2$
- $f \leq 2v - 4$
- $v \leq 2f - 4$

Steinitz 정리



- $f_2 = 2f_0 - 4$ 인 경우
 - 모든 면이 삼각형이다.
 - 정4면체, 정8면체, 정20면체
 - 단체다면체(simplicial polytope)
- $f_0 = 2f_2 - 4$ 인 경우
 - 모든 점이 세개의 모서리에 접한다.
 - 정4면체, 정6면체, 정12면체
 - 단순다면체(simple polytope)



Steinitz 정리의 증명(필요조건)

- 다면체의 각 면은 적어도 3개의 모서리에 인접하고 각각의 모서리는 두개의 면에 인접하므로

$$3f \leq 2e \quad \rightarrow \quad f \leq 2v - 4$$

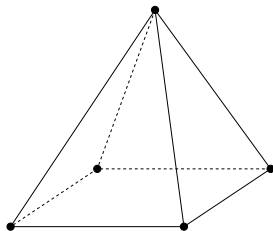
- 다면체의 각 꼭지점은 적어도 3개의 모서리에 인접하고 각각의 모서리는 두개의 꼭지점에 인접하므로

$$3v \leq 2e \quad \rightarrow \quad v \leq 2f - 4$$

Steinitz 정리의 증명(충분조건)

주어진 조건을 만족하는 v, e, f 에 대하여 v 개의 꼭지점, e 개의 모서리, f 개의 면을 갖는 3차원 볼록다면체를 찾아내면 된다.

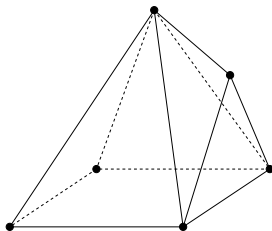
- n 각뿔의 경우:



$$v = n + 1, \quad e = 2n, \quad f = n + 1$$

Steinitz 정리의 증명(충분조건)

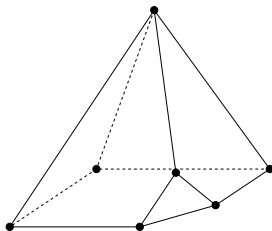
- 다면체의 삼각형면 위에 사면체를 붙일 경우:



$$v \rightarrow v + 1, \quad e \rightarrow e + 3, \quad f \rightarrow f + 2$$

Steinitz 정리의 증명(충분조건)

- 3개의 모서리에 인접한 꼭지점을 잘라내는 경우:



$$v \rightarrow v + 2, \quad e \rightarrow e + 3, \quad f \rightarrow f + 1$$

Steinitz 정리의 증명(충분조건)

v, e, f 가 $v - e + f = 2$, $f \leq 2v - 4$, $v \leq 2f - 4$ 를 만족한다고 하자.

Case 1. $v = f + k$ 인 경우:

- $v \leq 2f - 4$ 에 의해 $f - k - 1 \geq 3$
- $(f - k - 1)$ 각뿔을 만든다.
- 세개의 모서리에 인접한 꼭지점을 잘라내기를 k 번 반복하면 꼭지점이 v 개, 모서리가 e 개, 면이 f 개인 볼록다면체를 얻을 수 있다.

Case 2. $f = v + k$ 인 경우:

- $f \leq 2v - 4$ 에 의해 $v - k - 1 \geq 3$
- $(v - k - 1)$ 각뿔을 만든다.
- 삼각형면 위에 사면체를 붙이기를 k 번 반복하면 꼭지점이 v 개, 모서리가 e 개, 면이 f 개인 볼록다면체를 얻을 수 있다.

볼록다면체의 면

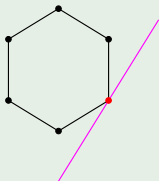
정의

- 볼록다면체는 유한개의 점의 최소볼록집합(convex hull)이다.

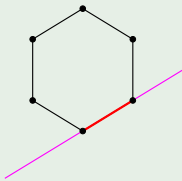
$$P = \text{conv}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset \mathbb{R}^d$$

- 볼록다면체 P 의 면(face)은 P 의 받침초평면(supporting hyperplane)과 P 의 교집합이다.

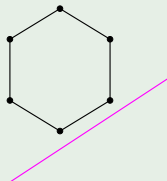
예제



0차원 면(꼭지점)



1차원 면(모서리)



-1차원 면(공집합)

블록다면체의 f -벡터

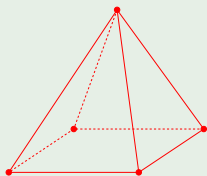
정의

블록다면체 P 의 f -벡터는

$$(f_{-1}(P), f_0(P), f_1(P), \dots, f_{d-1}(P))$$

이다. 여기서 $f_i(P)$ 는 P 의 i -차원 면들의 개수를 나타낸다.

예제



P

P 의 f -벡터는 $(1, 5, 8, 5)$.

볼록다면체의 f -벡터

질문

d -차원 볼록다면체의 f -벡터가 될 수 있는 필요충분조건은 무엇인가?

정리

- ($d = 2$) $(1, f_0, f_1)$ 이 볼록다각형의 f -벡터가 될 필요충분조건은 $f_0 = f_1$ 이다.
- ($d = 3$) Steinitz 정리

Euler-Poincaré 정리 (Schläfli, 1901)

d -차원 볼록다면체에 대하여

$$f_0 - f_1 + \cdots + (-1)^{d-1} f_{d-1} = 1 - (-1)^d.$$

- Poincaré에 의하여 호몰로지 이론을 이용하여 처음 증명됨.
- Bruggesser와 Mani에 의해 **shelling**을 이용하여 증명됨(1969)

단체다면체

정의

단체다면체(simplicial polytope)은 최고차원면이 모두 단체(simplex)인 볼록다면체이다.

정리 (g-추측(McMullen, 1971); g-정리(Billera and Lee, 1980))

단체다면체의 f -벡터가 될 필요충분조건은 다음 식들로 표현된다

- 일차방정식들 (**Dehn-Sommerville 방정식들**)
- 일차부등식들
- 비선형부등식들

단체다면체가 아니고 $\dim \geq 4$ 인 경우

- 아직 연구중.
- f -벡터보다 더 많은 정보가 필요함.

단체다면체의 h -벡터

정의

단체 다면체 P 와 $k = 0, 1, \dots, d$ 에 대하여

$$h_k = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{d-i}{k-i} f_{i-1}$$

$(h_0, h_1, \dots, h_d)$ 를 다면체 P 의 **h -벡터**라고 한다.

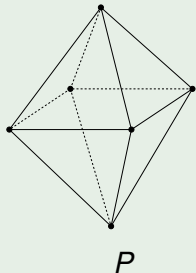
정리

단체다면체의 f -벡터와 h -벡터는 다음 방정식에 의해 서로 유일하게 표현된다.

$$\sum_{i=0}^d f_{i-1} (t-1)^{d-i} = \sum_{i=0}^d h_i t^{d-i}$$

단체다면체의 h -벡터

예제



- P 의 f -벡터: $(1, 6, 12, 8)$.

$$\begin{aligned} & 1(t-1)^3 + 6(t-1)^2 + 12(t-1)^1 + 8 \\ &= t^3 + 3t^2 + 3t + 1 \end{aligned}$$

- P 의 h -벡터: $(1, 3, 3, 1)$.

정리 (Dehn-Sommerville 방정식들)

단체다면체 P 의 h -벡터는 다음 방정식을 만족한다.

$$h_k(P) = h_{d-k}(P)$$

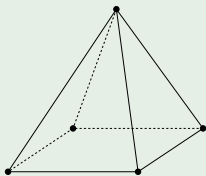
블록다면체의 플래그 f -벡터

정의

$S = \{s_1 < s_2 < \dots < s_k\}$ 를 $\{0, 1, \dots, d-1\}$ 의 부분집합이라 하자.

- 블록다면체 P 의 **S -플래그**는 $\dim F_i = s_i$ 를 만족하는 면들의 사슬 (chain) $\emptyset \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_k \subset P$ 이다.
- $f_S(P)$ 는 P 의 S -플래그들의 개수이다.
- 벡터 $(f_S(P))_{S \subseteq \{0,1,\dots,d-1\}}$ 를 P 의 **플래그 f -벡터**라고 한다.

예제



P

S	$f_S(P)$
$\emptyset$	1
0	5
1	8
2	5
01	16
02	16
12	16
012	32

일반적인 Dehn-Sommerville 방정식

정리 (Bayer-Billera, 1983)

d -차원 볼록다면체의 플래그 f -벡터들의 성분으로 만들어진 선형생성 부분공간(linear span)의 차원은 d -번째 피보나치수이다.

- 플래그 f -벡터의 성분들이 만족하는 일차방정식을 **일반적인 Dehn-Sommerville 방정식**이라고 한다.

일차독립인 플래그 f -벡터의 성분들

- 3-차원: $f_{\emptyset}, f_0, f_1$
- 4-차원: $f_{\emptyset}, f_0, f_1, f_2, f_{02}$
- 5-차원: $f_{\emptyset}, f_0, f_1, f_2, f_3, f_{02}, f_{03}, f_{13}$

플래그 벡터가 만족하는 부등식

정리 (Kalai, 1987)

$$f_{02} - 3f_2 + f_1 - df_0 + \binom{d+1}{2} \geq 0$$

정리 (4-차원 볼록다면체에서 만족되는 일차부등식들, Bayer, 1997)

$$f_0 \geq 0$$

$$f_3 \geq 0$$

$$f_{02} - 3f_2 \geq 0$$

$$f_{02} - 3f_1 \geq 0$$

$$f_{02} - 3f_2 + f_1 - 4f_0 + 10 \geq 0$$

$$6f_1 - 6f_0 - f_{02} \geq 0$$

블록다면체의 플래그 h -벡터

정의

P 를 d -차원 블록다면체라고 하자. P 의 **플래그 h -벡터** ($h_S(P) : S \subset \{0, 1, \dots, n-1\}$)는 다음과 같이 정의된다.

$$h_S(P) := \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S-T|} \cdot f_T(P).$$

정리 (일반적인 Dehn-Sommerville 방정식)

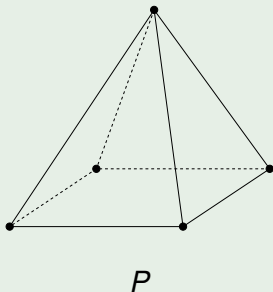
d -차원의 블록다면체 P 에 대하여 다음 방정식이 만족된다.

$$h_S(P) = h_T(P)$$

여기서 $T = \{0, 1, \dots, d-1\} - S$ 이다.

볼록다면체의 플래그 h -벡터

예제



S	$f_S(P)$	$h_S(P)$
$\emptyset$	1	1
0	5	4
1	8	7
2	5	4
01	16	4
02	16	7
12	16	4
012	32	1

블록다면체의 **cd**-지수

정의

블록다면체 P 의 **ab**-지수는 다음 비가환 다항식이다.

$$\mathbf{ab}(P) := \sum_{S \subseteq \{0,1,\dots,d-1\}} h_S(P) \cdot u_0 u_1 \cdots u_{d-1}.$$

여기서

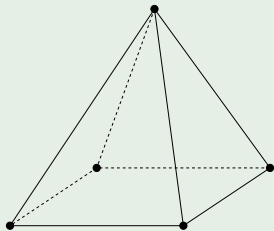
$$u_i := \begin{cases} \mathbf{a} & \text{if } i \notin S \\ \mathbf{b} & \text{if } i \in S \end{cases}$$

정리/정의

블록다면체 P 의 **ab**-지수는 $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ and $\mathbf{d} = \mathbf{ab} + \mathbf{ba}$ 의 비가환다항식으로 유일하게 표현된다.

이 다항식을 P 의 **cd**-지수라 하고 $\Psi(P)$ 로 나타낸다.

예제

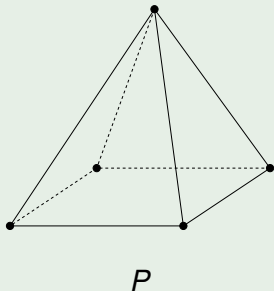


P

S	$f_S(P)$	$h_S(P)$	ab-단항식
$\emptyset$	1	1	aaa
0	5	4	baa
1	8	7	aba
2	5	4	aab
01	16	4	bba
02	16	7	bab
12	16	4	abb
012	32	1	bbb

$$\begin{aligned} \mathbf{ab}(P) = & \mathbf{a}^3 + 4\mathbf{ba}^2 + 7\mathbf{aba} + 4\mathbf{a}^2\mathbf{b} \\ & + 4\mathbf{b}^2\mathbf{a} + 7\mathbf{bab} + 4\mathbf{ab}^2 + \mathbf{b}^3 \end{aligned}$$

예제



$$\begin{aligned} \mathbf{ab}(P) &= \mathbf{a}^3 + 4\mathbf{a}^2\mathbf{b} + 7\mathbf{aba} + 4\mathbf{ab}^2 \\ &\quad + 4\mathbf{ba}^2 + 7\mathbf{bab} + 4\mathbf{b}^2\mathbf{a} + \mathbf{b}^3 \\ &= (\mathbf{a} + \mathbf{b})^3 + 3(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \\ &\quad + 3(\mathbf{ab} + \mathbf{ba})(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &\Downarrow \quad (\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{d} = \mathbf{ab} + \mathbf{ba}) \\ \Psi(P) &= \mathbf{c}^3 + 3\mathbf{cd} + 3\mathbf{dc} \end{aligned}$$

볼록다면체의 **cd**-지수

정리 (Bayer and Klapper, 1991)

- 볼록다면체의 **cd**-지수는 볼록다면체의 플래그 벡터와 일차동등 (*linearly equivalent*)하다.
- d -차원 볼록다면체의 **cd**-지수의 항의 개수는 d 번째 피보나치수이다.
- **cd**-지수가 존재할 필요충분조건은 일반적인 *Dehn-Sommerville* 방정식이 만족되는 것이다.

정리 (Stanley, 1994)

볼록다면체의 **cd**-지수의 계수들은 언제나 0보다 크거나 같다.

정리 (Billera & Ehrenborg, 2000)

볼록다면체의 **cd**-지수의 계수들은 단체(*simplex*)의 **cd**-지수보다 항별로 크거나 같다.

볼록다면체의 **cd**-지수

정리 (Ehrenborg and Readdy, 1998)

P 를 볼록다면체라 하자.

$$\Psi(\text{Pyr}(P)) = \frac{1}{2} \left[\Psi(P) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{c} \cdot \Psi(P) + \sum_{\sigma} \Psi(\sigma) \cdot \mathbf{d} \cdot \Psi(P/\sigma) \right],$$

$$\Psi(\text{Prism}(P)) = \Psi(P) \cdot \mathbf{c} + \sum_{\sigma} \Psi(\sigma) \cdot \mathbf{d} \cdot \Psi(P/\sigma),$$

$$\Psi(\text{Bipyr}(P)) = \mathbf{c} \cdot \Psi(P) + \sum_{\sigma} \Psi(\sigma) \cdot \mathbf{d} \cdot \Psi(P/\sigma),$$

정리 (Ehrenborg and Fox, 2003)

다면체 P 와 Q 에 대하여, $\Psi(P \times Q)$ 은 $\Psi(P)$ 와 $\Psi(Q)$ 로부터 계산할 수 있다.

블록다면체의 cd-지수

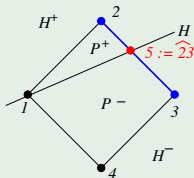
정리 (K.)

P 가 블록다면체이고 H 가 P 의 내부와 만나는 초평면이라 하면

$$\psi(P) = \psi(P^+) + \psi(P^-) - \psi(\hat{P}) \cdot \mathbf{c} - \sum_{\sigma} \psi(\hat{\sigma}) \cdot \mathbf{d} \cdot \psi(\hat{P}/\hat{\sigma}).$$

여기서 $P^+ = P \cap H^+$, $P^- = P \cap H^-$, $\hat{P} = P \cap H$, $\hat{\sigma} = \sigma \cap H$ 이고 마지막 합은 H 로 인해 만들어지는 두개의 반공간과 만나는 면 σ 에 대한 합이다.

예제



$$\begin{aligned} \psi(1234) &= \psi(125) + \psi(1345) \\ &\quad - \psi(15) \cdot \mathbf{c} \\ &\quad - \psi(5) \cdot \mathbf{d} \cdot \psi(15/5) \end{aligned}$$