- 제3회 무등 수학강연회 -

최대치 원리와 그 응용

조 성원

광주교육대학교

2011년 11월 25일

개요

개요

(상)미분 방정식

정의

(상)미분 방정식 : 미지의 함수와 그 도함수간의 관계를 나타내는 방정식이다.

(상)미분 방정식

정의

(상)미분 방정식 : 미지의 함수와 그 도함수간의 관계를 나타내는 방정식이다.

예

$$y' + y = t^2, \quad \frac{dy}{dt} = y + t^2, \quad y'''y' + y'' = \frac{\sin t}{y}, \quad F(t, y, y', \ldots y^k) = 0$$

정의

(상)미분 방정식 : 미지의 함수와 그 도함수간의 관계를 나타내는 방정식이다.

예

$y' + y = t^2, \quad \frac{dy}{dt} = y + t^2, \quad y'''y' + y'' = \frac{\sin t}{y}, \quad F(t, y, y', \ldots y^k) = 0$

정의

차수(order) : 가장 많은 y 미분의 횟수.

경계값 문제(Boundary value problem in ODE)

경계값 문제(Boundary value problem in ODE)

주어진 상수 g_1, g_2와 함수 f에 대하여 다음을 만족하는 함수 y를 찾는 문제:

경계값 문제(Boundary value problem in ODE)

주어진 상수 g_1, g_2와 함수 f에 대하여 다음을 만족하는 함수 y를 찾는 문제:

$$\begin{cases} y'' = f \quad \text{in } (0,1), \\ y(0) = g_1 \text{ (Dirichlet condition)}, \\ y(1) = g_2 \text{ (Dirichlet condition)}. \end{cases}$$

경계값 문제(Boundary value problem in ODE)

주어진 상수 g_1, g_2와 함수 f에 대하여 다음을 만족하는 함수 y를 찾는 문제:

$$\begin{cases} y'' = f \quad \text{in } (0,1), \\ y(0) = g_1 \text{ (Dirichlet condition)}, \\ y(1) = g_2 \text{ (Dirichlet condition)}. \end{cases}$$

정의

Dirichlet 조건: $y(0) = g_1$

경계값 문제(Boundary value problem in ODE)

주어진 상수 g_1, g_2와 함수 f에 대하여 다음을 만족하는 함수 y를 찾는 문제:

$$\begin{cases} y'' = f & \text{in } (0,1), \\ y(0) = g_1 & \text{(Dirichlet condition)}, \\ y(1) = g_2 & \text{(Dirichlet condition)}. \end{cases}$$

정의

Dirichlet 조건: $y(0) = g_1$
Neumann 조건: $-y'(0) = g_1$

경계값 문제(Boundary value problem in ODE)

주어진 상수 g_1, g_2와 함수 f에 대하여 다음을 만족하는 함수 y를 찾는 문제:

$$\begin{cases} y'' = f \quad \text{in } (0,1), \\ y(0) = g_1 \text{ (Dirichlet condition)}, \\ y(1) = g_2 \text{ (Dirichlet condition)}. \end{cases}$$

정의

Dirichlet 조건: $y(0) = g_1$
Neumann 조건: $-y'(0) = g_1$
Robin 조건: $ay(0) - by'(0) = g_1$

편미분 방정식

편미분 방정식

$\Omega(\subset \mathbb{R}^n)$에서 $\mathbb{R}^N$로의 함수 $u = (u^1, ...u^N)$에 대하여 함수 u와 함수의 편미분$(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_1}, \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \alpha = 1, ..., N)$ 의 관계가 주어진 방정식.

편미분 방정식

$\Omega(\subset \mathbb{R}^n)$에서 $\mathbb{R}^N$로의 함수 $u = (u^1, ...u^N)$에 대하여 함수 u와 함수의 편미분$(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_1}, \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \alpha = 1, ..., N)$ 의 관계가 주어진 방정식.

정의

편미분 방정식

$\Omega(\subset \mathbb{R}^n)$에서 $\mathbb{R}^N$로의 함수 $u = (u^1, ...u^N)$에 대하여 함수 u와 함수의 편미분$(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_1}, \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \alpha = 1, ..., N)$ 의 관계가 주어진 방정식.

정의

- *차수: 가장 높은 편미분의 횟수*

편미분 방정식

$\Omega(\subset \mathbb{R}^n)$에서 $\mathbb{R}^N$로의 함수 $u = (u^1, ...u^N)$에 대하여 함수 u와 함수의 편미분($\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_1}, \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \alpha = 1, ..., N$) 의 관계가 주어진 방정식.

정의

- *차수: 가장 높은 편미분의 횟수*
- $N = 1$*: single equation* $N > 1$*: 시스템*

편미분 방정식

$\Omega(\subset \mathbb{R}^n)$에서 $\mathbb{R}^N$로의 함수 $u = (u^1, ...u^N)$에 대하여 함수 u와 함수의 편미분$(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x_1}, \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \alpha = 1, ..., N)$ 의 관계가 주어진 방정식.

정의

- *차수: 가장 높은 편미분의 횟수*
- $N = 1$: *single equation* $\quad N > 1$: *시스템*
- $N = n = 1$: *상미분 방정식*

다양한 편미분 방정식

다양한 편미분 방정식

다양한 편미분 방정식

- Laplace's equation $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0$.

다양한 편미분 방정식

- Laplace's equation $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0$.
- Helmholtz's equation $-\Delta u = \lambda u$.

다양한 편미분 방정식

- Laplace's equation $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0$.
- Helmholtz's equation $-\Delta u = \lambda u$.
- Linear transport equation $u_t + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} = 0$.

다양한 편미분 방정식

- Laplace's equation $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0$.
- Helmholtz's equation $-\Delta u = \lambda u$.
- Linear transport equation $u_t + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} = 0$.
- Liouville's equation $u_t - \sum_{i=1}^{n} (b^i u)_{x_i} = 0$.
- Heat equation $u_t - \Delta u = 0$.
- Schrödinger equation $iu_t + \Delta u = 0$
- Kolmogorov's equation
  $u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} = 0$.
- Fokker-Planck equation
  $u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u)_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} (b^i u)_{x_i} = 0$.
- Wave equation $u_{tt} - \Delta u = 0$
- Klein-Gordon equation $u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0$.
- Telegraph equation $u_{tt} + 2du_t - u_{xx} = 0$.
- General wave equation $u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} = 0$
- Airy's equation $u_t + u_{xxx} = 0$.
- Beam equation $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$.

다양한 편미분 방정식

- Laplace's equation $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0$.
- Helmholtz's equation $-\Delta u = \lambda u$.
- Linear transport equation $u_t + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} = 0$.
- Liouville's equation $u_t - \sum_{i=1}^{n} (b^i u)_{x_i} = 0$.
- Heat equation $u_t - \Delta u = 0$.
- Schrödinger equation $iu_t + \Delta u = 0$
- Kolmogorov's equation
  $u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} = 0$.
- Fokker-Planck equation
  $u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u)_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} (b^i u)_{x_i} = 0$.
- Wave equation $u_{tt} - \Delta u = 0$
- Klein-Gordon equation $u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0$.
- Telegraph equation $u_{tt} + 2du_t - u_{xx} = 0$.
- General wave equation $u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} = 0$
- Airy's equation $u_t + u_{xxx} = 0$.
- Beam equation $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$.
- Eikonal equation $|Du| = 1$.
- Nonlinear Poisson equation $-\Delta u = f(u)$.
- p-Laplacian equation $div(|Du|^{p-2} Du) = 0$
- Minimal surface equation $div\left(\frac{Du}{(1+|Du|^2)^{2/1}}\right) = 0$.
- Monge-Ampère equation $det(D^2 u) = f$.
- Hamilton-Jacobi equation $u_t + H(Du, x) = 0$.
- Scalar conservation law $u_t + divF(u) = 0$.
- Inviscid Burgers' equation $u_t + uu_x = 0$.
- Scalar reaction-diffusion equation $u_t - \Delta u = f(u)$.
- Porous medium equation $u_t - \Delta(u^\gamma) = 0$.
- Nonlinear wave equation $u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0$.
- Korteweg-deVries (KdV) equation $u_t + uu_{xx} + u_{xxx} = 0$.
- Nonlinear Schrödinger equation $iu_t + \Delta u = f(|u|^2)$.

다양한 편미분 방정식

- Laplace's equation $\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i} = 0$.
- Helmholtz's equation $-\Delta u = \lambda u$.
- Linear transport equation $u_t + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} = 0$.
- Liouville's equation $u_t - \sum_{i=1}^{n} (b^i u)_{x_i} = 0$.
- Heat equation $u_t - \Delta u = 0$.
- Schrödinger equation $iu_t + \Delta u = 0$
- Kolmogorov's equation
  $u_t - \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} = 0$.
- Fokker-Planck equation
  $u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u)_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^{n} (b^i u)_{x_i} = 0$.
- Wave equation $u_{tt} - \Delta u = 0$
- Klein-Gordon equation $u_{tt} - \Delta u + m^2 u = 0$.
- Telegraph equation $u_{tt} + 2du_t - u_{xx} = 0$.
- General wave equation $u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} = 0$
- Airy's equation $u_t + u_{xxx} = 0$.
- Beam equation $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$.
- Eikonal equation $|Du| = 1$.
- Nonlinear Poisson equation $-\Delta u = f(u)$.
- p-Laplacian equation $div(|Du|^{p-2} Du) = 0$
- Minimal surface equation $div\left(\frac{Du}{(1+|Du|^2)^{2/1}}\right) = 0$.
- Monge-Ampère equation $det(D^2 u) = f$.
- Hamilton-Jacobi equation $u_t + H(Du, x) = 0$.
- Scalar conservation law $u_t + divF(u) = 0$.
- Inviscid Burgers' equation $u_t + uu_x = 0$.
- Scalar reaction-diffusion equation $u_t - \Delta u = f(u)$.
- Porous medium equation $u_t - \Delta(u^\gamma) = 0$.
- Nonlinear wave equation $u_{tt} - \Delta u + f(u) = 0$.
- Korteweg-deVries (KdV) equation $u_t + uu_{xx} + u_{xxx} = 0$.
- Nonlinear Schrödinger equation $iu_t + \Delta u = f(|u|^2)$.

'Partial Differential Equations', Evans 로부터

중요한 편미분 방정식

중요한 편미분 방정식

- $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) u = 0$: 라플라스 방정식 (Laplace equation, Elliptic equation)

중요한 편미분 방정식

- $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) u = 0$: 라플라스 방정식 (Laplace equation, Elliptic equation)

$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \Delta$

중요한 편미분 방정식

- $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) u = 0$: 라플라스 방정식 (Laplace equation, Elliptic equation)

$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \Delta$

- $\frac{\partial}{\partial_t} u - \Delta u = 0$: 열 방정식 (Heat equation, Parabolic equation)

- $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) u = 0$: 라플라스 방정식 (Laplace equation, Elliptic equation)
$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \Delta$
- $\frac{\partial}{\partial_t} u - \Delta u = 0$: 열 방정식 (Heat equation, Parabolic equation)
- $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u = 0$: 파동 방정식 (Wave equation, Hyperbolic equation)

편미분 방정식의 경계값 문제

편미분 방정식의 경계값 문제

$$(*)\begin{cases}\Delta u = f & \text{in } \Omega\\ u = g & \text{on } \partial\Omega\end{cases}$$

편미분 방정식의 경계값 문제

$$(*)\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

- $u : \Omega(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$.

편미분 방정식의 경계값 문제

$$(*) \begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

- $u : \Omega(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$.
- $\Delta := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right)$: 라플라스 연산자(operator)

편미분 방정식의 경계값 문제

$$(*)\begin{cases}\Delta u = f & \text{in } \Omega\\ u = g & \text{on } \partial\Omega\end{cases}$$

- $u : \Omega(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$.
- $\Delta := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$: 라플라스 연산자(operator)
- Ω: n차원의 주어진 도메인(connected, open, (bounded))

$\partial\Omega$는 도메인의 경계(boundary).

편미분 방정식의 경계값 문제

$$(*)\begin{cases}\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega\end{cases}$$

- $u : \Omega(\subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$.

- $\Delta := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)$: 라플라스 연산자(operator)

- Ω: n차원의 주어진 도메인(connected, open, (bounded))
$\partial\Omega$는 도메인의 경계(boundary).

- 경계치 문제를 푼다는 것은 주어진 f, g, Ω에 대하여 $(*)$를 만족하는 함수 u를 찾는 것

경계값 문제를 푼다는 것

경계값 문제를 푼다는 것

- 해를 구체적으로 찾는 방법

경계값 문제를 푼다는 것

- 해를 구체적으로 찾는 방법
  $y' = y$에 대하여 근은 $y = ce^x$

경계값 문제를 푼다는 것

- 해를 구체적으로 찾는 방법
  $y' = y$에 대하여 근은 $y = ce^x$
- 해를 표현하는 방법(convolution)

경계값 문제를 푼다는 것

- 해를 구체적으로 찾는 방법
  $y' = y$에 대하여 근은 $y = ce^x$
- 해를 표현하는 방법(convolution)
  Fourier & Laplace 변환, single & double layer potential, 기본해 (Fundamental solution) & 그린 함수(Green's function)

경계값 문제를 푼다는 것

- 해를 구체적으로 찾는 방법
  $y' = y$에 대하여 근은 $y = ce^x$
- 해를 표현하는 방법(convolution)
  Fourier & Laplace 변환, single & double layer potential, 기본해 (Fundamental solution) & 그린 함수(Green's function)
- 해가 존재하는 공간을 찾는 것

경계값 문제를 푼다는 것

- 해를 구체적으로 찾는 방법
  $y' = y$에 대하여 근은 $y = ce^x$
- 해를 표현하는 방법(convolution)
  Fourier & Laplace 변환, single & double layer potential, 기본해 (Fundamental solution) & 그린 함수(Green's function)
- 해가 존재하는 공간을 찾는 것
  $u \in C^{2,\alpha}, W^{2,p},$

경계값 문제를 푼다는 것

- 해를 구체적으로 찾는 방법
  $y' = y$에 대하여 근은 $y = ce^x$
- 해를 표현하는 방법(convolution)
  Fourier & Laplace 변환, single & double layer potential, 기본해 (Fundamental solution) & 그린 함수(Green's function)
- 해가 존재하는 공간을 찾는 것
  $u \in C^{2,\alpha}, W^{2,p},$
- 해를 근사하는 방법

경계값 문제를 푼다는 것

- 해를 구체적으로 찾는 방법
  $y' = y$에 대하여 근은 $y = ce^x$
- 해를 표현하는 방법(convolution)
  Fourier & Laplace 변환, single & double layer potential, 기본해 (Fundamental solution) & 그린 함수(Green's function)
- 해가 존재하는 공간을 찾는 것
  $u \in C^{2,\alpha}, W^{2,p},$
- 해를 근사하는 방법
  수치적인 접근, 멱급수 해법(power series method), 고유함수 표현법 (eigen function expansion)

경계값 문제를 푼다는 것

- 해를 구체적으로 찾는 방법
  $y' = y$에 대하여 근은 $y = ce^x$
- 해를 표현하는 방법(convolution)
  Fourier & Laplace 변환, single & double layer potential, 기본해 (Fundamental solution) & 그린 함수(Green's function)
- 해가 존재하는 공간을 찾는 것
  $u \in C^{2,\alpha}, W^{2,p},$
- 해를 근사하는 방법
  수치적인 접근, 멱급수 해법(power series method), 고유함수 표현법 (eigen function expansion)
- 근의 성질을 연구

경계값 문제를 푼다는 것

- 해를 구체적으로 찾는 방법
  $y' = y$에 대하여 근은 $y = ce^x$
- 해를 표현하는 방법(convolution)
  Fourier & Laplace 변환, single & double layer potential, 기본해 (Fundamental solution) & 그린 함수(Green's function)
- 해가 존재하는 공간을 찾는 것
  $u \in C^{2,\alpha}, W^{2,p},$
- 해를 근사하는 방법
  수치적인 접근, 멱급수 해법(power series method), 고유함수 표현법 (eigen function expansion)
- 근의 성질을 연구
  유일성, 안정성(stability), 정칙성(regularity),

개요

조화 함수와 예

조화 함수와 예

정의

함수 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *가* $\Delta u = 0$ *를 만족하면 조화함수(harmonic) 라고 한다.*

조화 함수와 예

정의

함수 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *가* $\Delta u = 0$ *를 만족하면 조화함수(harmonic) 라고 한다.*

예

해석적인 복소수 함수의 실수부, 허수부 : $Rez = x$, $Imz = y$,
$Rez^2 = x^2 - y^2$, $Imz^2 = 2xy$, ...

조화 함수와 예

정의

함수 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *가* $\Delta u = 0$ *를 만족하면 조화함수(harmonic) 라고 한다.*

예

해석적인 복소수 함수의 실수부, 허수부 : $Rez = x, Imz = y,$
$Rez^2 = x^2 - y^2, Imz^2 = 2xy, ...$

예

상수함수, 선형인 함수 : $u(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$

조화 함수와 예

정의

함수 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *가* $\Delta u = 0$ *를 만족하면 조화함수(harmonic) 라고 한다.*

예

해석적인 복소수 함수의 실수부, 허수부 : $Rez = x, Imz = y$,
$Rez^2 = x^2 - y^2$, $Imz^2 = 2xy$, ...

예

상수함수, 선형인 함수 : $u(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$

예

기본해 : $\frac{1}{2\pi} \log |z|$ in $\mathbb{R}^2$, $\quad \frac{1}{n(2-n)w_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}$ in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

조화 함수와 예

정의

함수 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 가 $\Delta u = 0$ 를 만족하면 조화함수(harmonic) 라고 한다.

예

해석적인 복소수 함수의 실수부, 허수부 : $Rez = x, Imz = y$, $Rez^2 = x^2 - y^2$, $Imz^2 = 2xy$, ...

예

상수함수, 선형인 함수 : $u(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$

예

기본해 : $\frac{1}{2\pi}\log|z|$ in $\mathbb{R}^2$, $\frac{1}{n(2-n)w_n}\frac{1}{|x|^{n-2}}$ in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

예

만일 $u(x)$가 조화 함수이면 $cu(A(x-x_0))$ 도 조화 함수이고 조화 함수의 미분도 조화함수이다.

최대치 원리 (Maximum principle)

최대치 원리 (Maximum principle)

MP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u \geq 0$ 라 하면

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

최대치 원리 (Maximum principle)

MP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u \geq 0$ 라 하면

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

참고

일반적으로 연속인 함수 u 에 대해 $\max_{\Omega} u$ 는 정의되지 않을 수도 있으나 $\sup_{\partial\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u$을 만족한다.

최대치 원리 (Maximum principle)

MP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u \geq 0$ 라 하면

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

참고

일반적으로 연속인 함수 u *에 대해* $\max_{\Omega} u$ *는 정의되지 않을 수도 있으나* $\sup_{\partial\Omega} u = \max_{\partial\Omega} u$*을 만족한다.*

참고

연속인 함수 u *에 대해*

$$\sup_{\Omega} u \geq \sup_{\partial\Omega} u$$

는 항상 성립한다.

최대치 원리 (Maximum principle)

최대치 원리 (Maximum principle)

MP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u \geq 0$ 라 하면

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

최대치 원리 (Maximum principle)

MP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u \geq 0$ 라 하면

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

증명

최대치 원리 (Maximum principle)

MP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u \geq 0$ 라 하면

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

증명

$\sup_{\Omega} u \geq \sup_{\partial\Omega} u$ 은 당연하므로 $\sup_{\Omega} u > \sup_{\partial\Omega} u$ 라 가정하고 모순을 보이면 된다.

최대치 원리 (Maximum principle)

MP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u \geq 0$ 라 하면

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

증명

$\sup_{\Omega} u \geq \sup_{\partial\Omega} u$ 은 당연하므로 $\sup_{\Omega} u > \sup_{\partial\Omega} u$ 라 가정하고 모순을 보이면 된다. 즉 $x_0 \in \Omega$ 에서 최대치를 가진다고 가정하자.

최대치 원리 (Maximum principle)

MP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u \geq 0$ 라 하면

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

증명

$\sup_{\Omega} u \geq \sup_{\partial\Omega} u$ 은 당연하므로 $\sup_{\Omega} u > \sup_{\partial\Omega} u$ 라 가정하고 모순을 보이면 된다. 즉 $x_0 \in \Omega$ 에서 최대치를 가진다고 가정하자.

먼저 $\Delta u > 0$ 이라 하면 $\frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i^2} \leq 0,\ i = 1, 2, ...n.$

최대치 원리 (Maximum principle)

MP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u \geq 0$ 라 하면

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

증명

$\sup_{\Omega} u \geq \sup_{\partial\Omega} u$ 은 당연하므로 $\sup_{\Omega} u > \sup_{\partial\Omega} u$ 라 가정하고 모순을 보이면 된다. 즉 $x_0 \in \Omega$ 에서 최대치를 가진다고 가정하자.
먼저 $\Delta u > 0$ 이라 하면 $\frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i^2} \leq 0$, $i = 1, 2, ...n$. 따라서 $\Delta u(x_0) \leq 0$ 이므로 모순.

최대치 원리 (Maximum principle)

MP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u \geq 0$ 라 하면

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

증명

$\sup_{\Omega} u \geq \sup_{\partial\Omega} u$ 은 당연하므로 $\sup_{\Omega} u > \sup_{\partial\Omega} u$ 라 가정하고 모순을 보이면 된다. 즉 $x_0 \in \Omega$ 에서 최대치를 가진다고 가정하자.
먼저 $\Delta u > 0$ 이라 하면 $\frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i^2} \leq 0$, $i = 1, 2, ...n$. 따라서 $\Delta u(x_0) \leq 0$ 이므로 모순.
$\Delta u \geq 0$ 인 경우 $U_\epsilon(x) = u(x) + \epsilon|x|^2$ 라 하면 $\Delta U_\epsilon > 0$.

최대치 원리 (Maximum principle)

MP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u \geq 0$ 라 하면

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

증명

$\sup_{\Omega} u \geq \sup_{\partial\Omega} u$ 은 당연하므로 $\sup_{\Omega} u > \sup_{\partial\Omega} u$ 라 가정하고 모순을 보이면 된다. 즉 $x_0 \in \Omega$ 에서 최대치를 가진다고 가정하자.

먼저 $\Delta u > 0$ 이라 하면 $\frac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i^2} \leq 0, \; i = 1, 2, ...n.$ 따라서 $\Delta u(x_0) \leq 0$ 이므로 모순.

$\Delta u \geq 0$ 인 경우 $U_\epsilon(x) = u(x) + \epsilon|x|^2$ 라 하면 $\Delta U_\epsilon > 0.$

$$\sup_{\Omega} U_\epsilon = \sup_{\partial\Omega} U_\epsilon$$

에서 $\epsilon \to 0^+$ 를 생각해 보면, 정리의 결과를 얻는다. □

최소치 원리

최소치 원리

mP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u \leq 0$ 라 하면 $\inf_\Omega u = \inf_{\partial\Omega} u$.

최소치 원리

mP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u \leq 0$ 라 하면 $\inf_\Omega u = \inf_{\partial\Omega} u$.

증명

MP 을 $-u$ 에 적용. $\square$

최소치 원리

mP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u \leq 0$ 라 하면 $\inf_\Omega u = \inf_{\partial\Omega} u$.

증명

MP 을 $-u$ 에 적용. $\square$

따름정리

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u = 0$ (u 가 조화함수) 라 하면 $\sup_\Omega u = \sup_{\partial\Omega} u$, $\inf_\Omega u = \inf_{\partial\Omega} u$.

최소치 원리

mP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u \leq 0$ 라 하면 $\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u$.

증명

MP 을 $-u$ 에 적용. □

따름정리

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u 에 대하여, $\Delta u = 0$ (u 가 조화함수) 라 하면 $\quad \sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u, \quad \inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega} u.$

따름정리

다음 경계값 문제의 근은 (존재한다면) 유일하다.

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \qquad u = g \quad \text{on } \partial\Omega$$

비교원리 (Comparison principle)

비교원리 (Comparison principle)

CP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u, v 에 대하여, Ω 에서 $\Delta u \leq \Delta v$ 이고 $\partial\Omega$ 에서 $u \geq v$ 라 하면 $u \geq v$ 가 Ω 에서 성립한다.

CP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u, v 에 대하여, Ω 에서 $\Delta u \leq \Delta v$ 이고 $\partial\Omega$ 에서 $u \geq v$ 라 하면 $u \geq v$ 가 Ω 에서 성립한다.

증명

mP 을 $u - v$ 에 적용하면 $\Delta(u - v) \leq 0$ in Ω, $u - v \geq 0$ on $\partial\Omega$.

CP

유계로 주어진 도메인 Ω 에서 $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 인 함수 u, v 에 대하여, Ω 에서 $\Delta u \leq \Delta v$ 이고 $\partial\Omega$ 에서 $u \geq v$ 라 하면 $u \geq v$ 가 Ω 에서 성립한다.

증명

mP 을 $u - v$ 에 적용하면 $\Delta(u - v) \leq 0$ in Ω, $u - v \geq 0$ on $\partial\Omega$.
$\inf_\Omega u - v = \inf_{\partial\Omega} u - v \geq 0$. □

최대치 원리와 열, 파동 방정식

최대치 원리와 열, 파동 방정식

최대치 원리는 열방정식등에도 성립하나 파동방정식에는 성립하지 않는다.

최대치 원리는 열방정식등에도 성립하나 파동방정식에는 성립하지 않는다.

예

도메인 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$에서 $u(x, t) = \cos t \cos x$ 는 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u = 0$ 를 만족하나 경계에서 0 값을 가진다.

최대치 원리는 열방정식등에도 성립하나 파동방정식에는 성립하지 않는다.

예

도메인 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$에서 $u(x,t) = \cos t \cos x$ 는 $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u - \Delta u = 0$ 를 만족하나 경계에서 0 값을 가진다.

예

일차원에서 $u(x) = \sin x$ 는 $u'' + u = 0$ 를 만족시키나 최대치 원리를 만족하지 않는다.

Hopf Lemma (1927)

Hopf Lemma (1927)

정리

주어진 도메인 Ω *에서* $\Delta u \geq 0$ *이라 하고, 경계위의 점* x_0 *에서*
(i) u *는* x_0 *에서 연속이고,*
(ii) $u(x_0) > u(x)$, $x \in \Omega$
(iii) x_0 *에 접하는 도메인 안쪽에 놓여있는 구* (B_r)*가 존재한다.*
위 조건을 만족하면 $\lim \mathit{inf}_{x \to x_0, r - |x| > \frac{1}{2}|x - x_0|} \frac{u(x_0) - u(x)}{|x - x_0|} > 0.$

Hopf Lemma (1927)

정리

주어진 도메인 Ω *에서* $\Delta u \geq 0$ *이라 하고, 경계위의 점* x_0 *에서*
(i) u *는* x_0 *에서 연속이고,*
(ii) $u(x_0) > u(x)$, $x \in \Omega$
(iii) x_0 *에 접하는 도메인 안쪽에 놓여있는 구* (B_r)*가 존재한다.*
위 조건을 만족하면 $\liminf_{x \to x_0, r-|x| > \frac{1}{2}|x-x_0|} \frac{u(x_0)-u(x)}{|x-x_0|} > 0.$

참고

$r - |x| > \frac{1}{2}|x - x_0|$ *은 논탄젠셜 방향의 영역을 나타낸다.*

Hopf Lemma (1927)

정리

주어진 도메인 Ω *에서* $\Delta u \geq 0$ *이라 하고, 경계위의 점* x_0 *에서*
(i) u *는* x_0 *에서 연속이고,*
(ii) $u(x_0) > u(x)$, $x \in \Omega$
(iii) x_0 *에 접하는 도메인 안쪽에 놓여있는 구* (B_r)*가 존재한다.*
위 조건을 만족하면 $\liminf_{x \to x_0, r-|x| > \frac{1}{2}|x-x_0|} \frac{u(x_0)-u(x)}{|x-x_0|} > 0.$

참고

$r - |x| > \frac{1}{2}|x - x_0|$ *은 논탄젠셜 방향의 영역을 나타낸다.*
$u(x_0) - u(x) \geq 0$ *이므로,* $\liminf_{x \to x_0, r-|x| > \frac{1}{2}|x-x_0|} \frac{u(x_0)-u(x)}{|x-x_0|} \geq 0$ *는* $\Delta u \geq 0$ *조건에 상관없이 항상 성립.*

Hopf Lemma (1927)

Hopf Lemma (1927)

정리

주어진 도메인 Ω *에서* $\Delta u \geq 0$ *이라 하고, 경계위의 점* x_0 *에서*
(i) u *는* x_0 *에서 연속이고,*
(ii) $u(x_0) > u(x)$, $x \in \Omega$
(iii) x_0 *에 접하는 도메인 안쪽에 놓여있는 구* (B_r)*가 존재한다.*
위 조건을 만족하면 $\liminf_{x \to x_0, r - |x| > \frac{1}{2}|x - x_0|} \frac{u(x_0) - u(x)}{|x - x_0|} > 0.$

Hopf Lemma (1927)

정리

주어진 도메인 Ω *에서* $\Delta u \geq 0$ *이라 하고, 경계위의 점* x_0 *에서*
(i) u *는* x_0 *에서 연속이고,*
(ii) $u(x_0) > u(x)$, $x \in \Omega$
(iii) x_0 *에 접하는 도메인 안쪽에 놓여있는 구* (B_r)*가 존재한다.*
위 조건을 만족하면 $\liminf_{x \to x_0, r - |x| > \frac{1}{2}|x - x_0|} \frac{u(x_0) - u(x)}{|x - x_0|} > 0$.

Proof.

x_0 에 접하는 구를 일반성을 잃지 않고, $B_0(r)$ 이라 하고
$v(x) := \epsilon(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}})$.

Hopf Lemma (1927)

정리

주어진 도메인 Ω *에서* $\Delta u \geq 0$ *이라 하고, 경계위의 점* x_0 *에서*
(i) u *는* x_0 *에서 연속이고,*
(ii) $u(x_0) > u(x)$, $x \in \Omega$
(iii) x_0 *에 접하는 도메인 안쪽에 놓여있는 구* (B_r)*가 존재한다.*
위 조건을 만족하면 $\liminf_{x \to x_0, r-|x| > \frac{1}{2}|x-x_0|} \frac{u(x_0)-u(x)}{|x-x_0|} > 0$.

Proof.

x_0 에 접하는 구를 일반성을 잃지 않고, $B_0(r)$ 이라 하고
$v(x) := \epsilon(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}})$. $\Delta v(x) = 0$, $x \in B_r \setminus B_{r/2}$, $v(x) = 0$, $x \in \partial B_r$.

Hopf Lemma (1927)

정리

주어진 도메인 Ω 에서 $\Delta u \geq 0$ 이라 하고, 경계위의 점 x_0 에서
(i) u 는 x_0 에서 연속이고,
(ii) $u(x_0) > u(x)$, $x \in \Omega$
(iii) x_0 에 접하는 도메인 안쪽에 놓여있는 구 (B_r)가 존재한다.
위 조건을 만족하면 $\liminf_{x \to x_0, r - |x| > \frac{1}{2}|x - x_0|} \frac{u(x_0) - u(x)}{|x - x_0|} > 0$.

Proof.

x_0 에 접하는 구를 일반성을 잃지 않고, $B_0(r)$ 이라 하고
$v(x) := \epsilon(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}})$. $\Delta v(x) = 0$, $x \in B_r \setminus B_{r/2}$, $v(x) = 0$, $x \in \partial B_r$. 아주 작은 ϵ 에 대하여 $u(x_0) - u(x) \geq \epsilon(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}})$, $|x| = \frac{r}{2}$.

Hopf Lemma (1927)

정리

주어진 도메인 Ω 에서 $\Delta u \geq 0$ 이라 하고, 경계위의 점 x_0 에서
(i) u 는 x_0 에서 연속이고,
(ii) $u(x_0) > u(x)$, $x \in \Omega$
(iii) x_0 에 접하는 도메인 안쪽에 놓여있는 구 (B_r)가 존재한다.
위 조건을 만족하면 $\liminf_{x \to x_0, r-|x| > \frac{1}{2}|x-x_0|} \frac{u(x_0)-u(x)}{|x-x_0|} > 0.$

Proof.

x_0 에 접하는 구를 일반성을 잃지 않고, $B_0(r)$ 이라 하고
$v(x) := \epsilon(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}})$. $\Delta v(x) = 0$, $x \in B_r \setminus B_{r/2}$, $v(x) = 0$, $x \in \partial B_r$. 아주 작은 ϵ 에 대하여 $u(x_0) - u(x) \geq \epsilon(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}})$, $|x| = \frac{r}{2}$.
비교원리에 의해 $u(x_0) - u(x) \geq \epsilon(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}})$, $x \in B_0(r) \setminus B_0(\frac{r}{2})$.

Hopf Lemma (1927)

정리

주어진 도메인 Ω *에서* $\Delta u \geq 0$ *이라 하고, 경계위의 점* x_0 *에서*
(i) u *는* x_0 *에서 연속이고,*
(ii) $u(x_0) > u(x)$, $x \in \Omega$
(iii) x_0 *에 접하는 도메인 안쪽에 놓여있는 구* (B_r)*가 존재한다.*
위 조건을 만족하면 $\liminf_{x \to x_0, r-|x| > \frac{1}{2}|x-x_0|} \frac{u(x_0)-u(x)}{|x-x_0|} > 0$.

Proof.

x_0 에 접하는 구를 일반성을 잃지 않고, $B_0(r)$ 이라 하고
$v(x) := \epsilon(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}})$. $\Delta v(x) = 0$, $x \in B_r \setminus B_{r/2}$, $v(x) = 0$, $x \in \partial B_r$. 아주 작은 ϵ 에 대하여 $u(x_0) - u(x) \geq \epsilon(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}})$, $|x| = \frac{r}{2}$.
비교원리에 의해 $u(x_0) - u(x) \geq \epsilon(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}})$, $x \in B_0(r) \setminus B_0(\frac{r}{2})$.
따라서, $\frac{u(x_0)-u(x)}{|x-x_0|} \geq \frac{\epsilon}{|x-x_0|}(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}}) = \epsilon \frac{r^{n-2}-|x|^{n-2}}{|x-x_0| r^{n-2} |x|^{n-2}} > 0$.

Hopf Lemma (1927)

정리

주어진 도메인 Ω *에서* $\Delta u \geq 0$ *이라 하고, 경계위의 점* x_0 *에서*
(i) u *는* x_0 *에서 연속이고,*
(ii) $u(x_0) > u(x)$, $x \in \Omega$
(iii) x_0 *에 접하는 도메인 안쪽에 놓여있는 구* (B_r)*가 존재한다.*
위 조건을 만족하면 $\liminf_{x \to x_0, r-|x| > \frac{1}{2}|x-x_0|} \frac{u(x_0)-u(x)}{|x-x_0|} > 0.$

Proof.

x_0 에 접하는 구를 일반성을 잃지 않고, $B_0(r)$ 이라 하고
$v(x) := \epsilon(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}})$. $\Delta v(x) = 0$, $x \in B_r \setminus B_{r/2}$, $v(x) = 0$, $x \in \partial B_r$. 아주 작은 ϵ 에 대하여 $u(x_0) - u(x) \geq \epsilon(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}})$, $|x| = \frac{r}{2}$.
비교원리에 의해 $u(x_0) - u(x) \geq \epsilon(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}})$, $x \in B_0(r) \setminus B_0(\frac{r}{2})$.
따라서, $\frac{u(x_0)-u(x)}{|x-x_0|} \geq \frac{\epsilon}{|x-x_0|}(\frac{1}{|x|^{n-2}} - \frac{1}{r^{n-2}}) = \epsilon\frac{r^{n-2}-|x|^{n-2}}{|x-x_0|r^{n-2}|x|^{n-2}} > 0.$
$n = 2$ 일 때는 log 함수 이용. □

강한 최대치 원리 (Strong Maximum principle)

강한 최대치 원리 (Strong Maximum principle)

정리

주어진 도메인 Ω 에서 $\Delta u \geq 0$ 이라 하고, 도메인 안쪽의 점 x_0 에서 최대값을 가진다고 하면 u 는 상수함수이다.

강한 최대치 원리 (Strong Maximum principle)

정리

주어진 도메인 Ω *에서* $\Delta u \geq 0$ *이라 하고, 도메인 안쪽의 점* x_0 *에서 최대값을 가진다고 하면* u *는 상수함수이다.*

증명의 아이디어

최대값을 M 이라 하고 Ω^- 를 $u < M$ 인 영역이라고 하자.
Ω 에 속하면서 $\partial\Omega^-$에 접하는 구에 앞의 Hopf lemma 를 적용하면 된다. □

강한 최대치 원리 (Strong Maximum principle)

정리

주어진 도메인 Ω *에서* $\Delta u \geq 0$ *이라 하고, 도메인 안쪽의 점* x_0 *에서 최대값을 가진다고 하면* u *는 상수함수이다.*

증명의 아이디어

최대값을 M 이라 하고 Ω^- 를 $u < M$ 인 영역이라고 하자.
Ω 에 속하면서 $\partial\Omega^-$에 접하는 구에 앞의 Hopf lemma 를 적용하면 된다. □

정리 (노이만 문제의 유일성)

다음과 같은 노이만 문제는 (존재한다면) 상수 차이의 해만을 갖는다.

$$(*)\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } B \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{on } \partial B \end{cases}$$

개요

미분함수의 유계

미분함수의 유계

정리

주어진 영역 Ω 에서 $\Delta u = f$ 라 하자. $x_0 \in \Omega$ 이고 $R := dist(x_0, \partial\Omega)$ 라 하면 $|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{n}{R} \sup_{\partial B_R(x_0)} |u| + \frac{R}{2} \sup_{B_R(x_0)} |f|, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

미분함수의 유계

정리

주어진 영역 Ω *에서* $\Delta u = f$ *라 하자.* $x_0 \in \Omega$ *이고* $R := dist(x_0, \partial\Omega)$ *라 하면* $\quad |u_{x_i}(x_0)| \le \frac{n}{R} \sup_{\partial B_R(x_0)} |u| + \frac{R}{2} \sup_{B_R(x_0)} |f|, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Proof.

$x_0 = 0$ 라 하고, $m = \sup_{\partial B_R} |u|, \quad M = \sup_{B_R} |f|$ 이라 하고

미분함수의 유계

정리

주어진 영역 Ω *에서* $\Delta u = f$ *라 하자.* $x_0 \in \Omega$ *이고* $R := dist(x_0, \partial\Omega)$ *라 하면* $|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{n}{R} \sup_{\partial B_R(x_0)} |u| + \frac{R}{2} \sup_{B_R(x_0)} |f|, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Proof.

$x_0 = 0$ 라 하고, $m = \sup_{\partial B_R} |u|, \quad M = \sup_{B_R} |f|$ 이라 하고

$v(x) = \frac{m}{R^2}|x|^2 + x_1(R - x_1)\left(\frac{nm}{R^2} + \frac{M}{2}\right)$ 라 하면,

정리

주어진 영역 Ω *에서* $\Delta u = f$ *라 하자.* $x_0 \in \Omega$ *이고* $R := dist(x_0, \partial\Omega)$ *라 하면* $|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{n}{R} \sup_{\partial B_R(x_0)} |u| + \frac{R}{2} \sup_{B_R(x_0)} |f|, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Proof.

$x_0 = 0$ 라 하고, $m = \sup_{\partial B_R} |u|, \quad M = \sup_{B_R} |f|$ 이라 하고

$v(x) = \frac{m}{R^2}|x|^2 + x_1(R - x_1)\left(\frac{nm}{R^2} + \frac{M}{2}\right)$ 라 하면,

$\Delta v = -M$,

$v(x) \geq 0$, $x_1 = 0$, $x = (x_1, x_2, ...x_n)$,

$v(x) \geq m$, $|x| = R$, $x_1 \geq 0$.

미분함수의 유계

정리

주어진 영역 Ω *에서* $\Delta u = f$ *라 하자.* $x_0 \in \Omega$ *이고* $R := dist(x_0, \partial\Omega)$ *라 하면* $\quad |u_{x_i}(x_0)| \le \frac{n}{R} \sup_{\partial B_R(x_0)} |u| + \frac{R}{2} \sup_{B_R(x_0)} |f|, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Proof.

$x_0 = 0$ 라 하고, $m = \sup_{\partial B_R} |u|, \quad M = \sup_{B_R} |f|$ 이라 하고
$v(x) = \frac{m}{R^2}|x|^2 + x_1(R - x_1)\left(\frac{nm}{R^2} + \frac{M}{2}\right)$ 라 하면,
$\Delta v = -M,$
$v(x) \ge 0,\ x_1 = 0,\ x = (x_1, x_2, ...x_n),$
$v(x) \ge m,\ |x| = R,\ x_1 \ge 0.$
$\overline{u}(x) := \frac{1}{2}\left(u(x_1, ...x_n) - u(-x_1, x_2, ...x_n)\right)$ 에 대하여,
$|\Delta\overline{u}(x)| \le M, \quad \overline{u}(0, x_2, ...x_n) = 0, \quad |\overline{u}(x)| \le m,\ |x| = R.$

미분함수의 유계

정리

주어진 영역 Ω 에서 $\Delta u = f$ 라 하자. $x_0 \in \Omega$ 이고 $R := dist(x_0, \partial\Omega)$ 라 하면 $|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{n}{R} \sup_{\partial B_R(x_0)} |u| + \frac{R}{2} \sup_{B_R(x_0)} |f|, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Proof.

$x_0 = 0$ 라 하고, $m = \sup_{\partial B_R} |u|, \quad M = \sup_{B_R} |f|$ 이라 하고
$v(x) = \frac{m}{R^2}|x|^2 + x_1(R - x_1)\left(\frac{nm}{R^2} + \frac{M}{2}\right)$ 라 하면,
$\Delta v = -M,$
$v(x) \geq 0,\ x_1 = 0,\ x = (x_1, x_2, ...x_n),$
$v(x) \geq m,\ |x| = R,\ x_1 \geq 0.$
$\overline{u}(x) := \frac{1}{2}\left(u(x_1, ...x_n) - u(-x_1, x_2, ...x_n)\right)$ 에 대하여,
$|\Delta \overline{u}(x)| \leq M, \quad \overline{u}(0, x_2, ...x_n) = 0, \quad |\overline{u}(x)| \leq m,\ |x| = R.$
$B_R^+ := \{|x| \leq R, x_1 > 0\}$ 에서 비교원리를 적용하면 $|\overline{u}(x)| \leq v(x).$

정리

주어진 영역 Ω *에서* $\Delta u = f$ *라 하자.* $x_0 \in \Omega$ *이고* $R := dist(x_0, \partial\Omega)$ *라 하면* $\quad |u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{n}{R} \sup_{\partial B_R(x_0)} |u| + \frac{R}{2} \sup_{B_R(x_0)} |f|, \quad i = 1, 2, \ldots, n$

Proof.

$x_0 = 0$ 라 하고, $m = \sup_{\partial B_R} |u|, \quad M = \sup_{B_R} |f|$ 이라 하고

$v(x) = \frac{m}{R^2}|x|^2 + x_1(R - x_1)\left(\frac{nm}{R^2} + \frac{M}{2}\right)$ 라 하면,

$\Delta v = -M$,

$v(x) \geq 0$, $x_1 = 0$, $x = (x_1, x_2, ...x_n)$,

$v(x) \geq m$, $|x| = R$, $x_1 \geq 0$.

$\overline{u}(x) := \frac{1}{2}(u(x_1, ...x_n) - u(-x_1, x_2, ...x_n))$ 에 대하여,

$|\Delta\overline{u}(x)| \leq M, \quad \overline{u}(0, x_2, ...x_n) = 0, \quad |\overline{u}(x)| \leq m$, $|x| = R$.

$B_R^+ := \{|x| \leq R, x_1 > 0\}$ 에서 비교원리를 적용하면 $|\overline{u}(x)| \leq v(x)$.

$$|u_{x_1}(0)| = \lim_{x_1 \to 0, x_1 > 0} \left|\frac{\overline{u}(x_1, 0, ..., 0)}{x_1}\right| \leq \lim_{x_1 \to 0, x_1 > 0} \frac{v(x_1, 0, ..., 0)}{x_1} = \frac{nm}{R} + \frac{R}{2}M.$$

□

Liouville 의 정리

정리

만일 $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 이 조화함수이며 유계라고 하자. 그러면 u 는 상수함수이다.

Liouville 의 정리

정리

만일 $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 이 조화함수이며 유계라고 하자. 그러면 u 는 상수함수이다.

Proof.

앞의 정리에 의해, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{n}{R} \sup_{\mathbb{R}^n} |u|, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

정리

만일 $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 이 조화함수이며 유계라고 하자. 그러면 u 는 상수함수이다.

Proof.

앞의 정리에 의해, $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$|u_{x_i}(x_0)| \leq \frac{n}{R} \sup_{\mathbb{R}^n} |u|, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

$R \to \infty$ 이면 $|u_{x_i}(x_0)| \to 0$ 이므로, u 는 상수함수이다. □

다음 문제들에서 특별한 언급이 없는한
$u \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, $\quad \mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0, x = (x_1, ..., x_n)\}$ 이다. 이 때
다음을 증명하거나 반례를 찾으시오:

다음 문제들에서 특별한 언급이 없는한
$u \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, $\quad \mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0, x = (x_1, ..., x_n)\}$ 이다. 이 때
다음을 증명하거나 반례를 찾으시오:

문제

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+, \quad u = 0 \text{ on } x_n = 0$$

이면 $u \equiv 0$.

다음 문제들에서 특별한 언급이 없는한
$u \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, $\quad \mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0, x = (x_1, ..., x_n)\}$ 이다. 이 때
다음을 증명하거나 반례를 찾으시오:

문제

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+, \quad u = 0 \text{ on } x_n = 0$$

이면 $u \equiv 0$.

다음 문제들에서 특별한 언급이 없는한
$u \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, $\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0, x = (x_1, ..., x_n)\}$ 이다. 이 때 다음을 증명하거나 반례를 찾으시오:

문제

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+, \quad u = 0 \text{ on } x_n = 0$$

이면 $u \equiv 0$.

반례

$u(x) = x_n$

다음 문제들에서 특별한 언급이 없는한
$u \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, $\quad \mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0, x = (x_1, ..., x_n)\}$ 이다. 이 때
다음을 증명하거나 반례를 찾으시오:

문제

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+, \quad u = 0 \text{ on } x_n = 0$$

이면 $u \equiv 0$.

반례

$u(x) = x_n$

문제

음과 양의 값을 가지는 함수 u 가 존재하여

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+, \quad u = 0 \text{ on } x_n = 0.$$

다음 문제들에서 특별한 언급이 없는한
$u \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^n_+})$, $\quad \mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0, x = (x_1, ..., x_n)\}$ 이다. 이 때 다음을 증명하거나 반례를 찾으시오:

문제

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+, \quad u = 0 \text{ on } x_n = 0$$

이면 $u \equiv 0$.

반례

$u(x) = x_n$

문제

음과 양의 값을 가지는 함수 u 가 존재하여

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+, \quad u = 0 \text{ on } x_n = 0.$$

반례

$u(x) = e^{x_1} \sin x_n$

문제

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+, \quad u = 0 \text{ on } x_n = 0, \quad u \to 0 \text{ as } |x| \to \infty$$

이면 $u \equiv 0$.

문제

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+, \quad u = 0 \text{ on } x_n = 0, \quad u \to 0 \text{ as } |x| \to \infty$$

이면 $u \equiv 0$.

참

B_R^+ 영역에서 최대치 원리를 적용.

문제

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+, \quad u = 0 \text{ on } x_n = 0, \quad u \to 0 \text{ as } |x| \to \infty$$

이면 $u \equiv 0$.

참

B_R^+ 영역에서 최대치 원리를 적용.

문제

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+, \quad u = 0 \text{ on } x_n = 0, \quad \sup_{\mathbb{R}^n_+} |u| < \infty.$$

이면 $u \equiv 0$.

문제

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+, \quad u = 0 \text{ on } x_n = 0, \quad u \to 0 \text{ as } |x| \to \infty$$

이면 $u \equiv 0$.

참

B_R^+ 영역에서 최대치 원리를 적용.

문제

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n_+, \quad u = 0 \text{ on } x_n = 0, \quad \sup_{\mathbb{R}^n_+} |u| < \infty.$$

이면 $u \equiv 0$.

참

문제

$u \in C^2(\mathbb{R}^d_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^d_+} \setminus \{0\})$ 일 때,

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d_+, \quad u = 0 \text{ on } \{x_d = 0\} \setminus \{0\}, \quad u \to 0 \text{ as } |x| \to \infty$$

이면 $u \equiv 0$.

문제

$u \in C^2(\mathbb{R}^d_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^d_+} \setminus \{0\})$ 일 때,

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d_+, \quad u = 0 \text{ on } \{x_d = 0\} \setminus \{0\}, \quad u \to 0 \text{ as } |x| \to \infty$$

이면 $u \equiv 0$.

반례

Counter example: $\frac{x_n}{|x|^n} =$

문제

$u \in C^2(\mathbb{R}^d_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^d_+} \setminus \{0\})$ 일 때,

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d_+, \quad u = 0 \text{ on } \{x_d = 0\} \setminus \{0\}, \quad u \to 0 \text{ as } |x| \to \infty$$

이면 $u \equiv 0$.

반례

Counter example: $\frac{x_n}{|x|^n} = c\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{1}{|x|^{n-2}}$.

문제

$u \in C^2(\mathbb{R}^d_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^d_+} \setminus \{0\})$ 일 때,

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d_+, \quad u = 0 \text{ on } \{x_d = 0\} \setminus \{0\}, \quad u \to 0 \text{ as } |x| \to \infty$$

이면 $u \equiv 0$.

반례

Counter example: $\frac{x_n}{|x|^n} = c\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{1}{|x|^{n-2}}$.

문제

증명하거나 반례를 찾으시오:

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d_+, \quad u = 0, \ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ when } x_d = 0.$$

Then $u \equiv 0$.

문제

$u \in C^2(\mathbb{R}^d_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^d_+} \setminus \{0\})$ 일 때,

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d_+, \quad u = 0 \text{ on } \{x_d = 0\} \setminus \{0\}, \quad u \to 0 \text{ as } |x| \to \infty$$

이면 $u \equiv 0$.

반례

Counter example: $\frac{x_n}{|x|^n} = c \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{1}{|x|^{n-2}}$.

문제

증명하거나 반례를 찾으시오:

$$\Delta u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^d_+, \quad u = 0, \; \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ when } x_d = 0.$$

Then $u \equiv 0$.

참

Removable singularity

Removable singularity

정리

만일 두 번 미분 가능한 함수 u 가 존재하여 $B_1(0) \setminus \{0\}$ 에서 조화함수이고 유계라고 하자. 그리고 ∂B_1 에서 0 값을 가진다고 하자. 그러면 u는 $B_1(0)$ 전체에서 0 인 상수함수이다.

Removable singularity

정리

만일 두 번 미분 가능한 함수 u 가 존재하여 $B_1(0) \setminus \{0\}$ 에서 조화함수이고 유계라고 하자. 그리고 ∂B_1 에서 0 값을 가진다고 하자. 그러면 u는 $B_1(0)$ 전체에서 0 인 상수함수이다.

증명

Removable singularity

정리

만일 두 번 미분 가능한 함수 u 가 존재하여 $B_1(0) \setminus \{0\}$ 에서 조화함수이고 유계라고 하자. 그리고 ∂B_1 에서 0 값을 가진다고 하자. 그러면 u는 $B_1(0)$ 전체에서 0 인 상수함수이다.

증명

일반성을 잃지 않고, $|u| \leq 1$ 이라 하자.

Removable singularity

정리

만일 두 번 미분 가능한 함수 u 가 존재하여 $B_1(0) \setminus \{0\}$ 에서 조화함수이고 유계라고 하자. 그리고 ∂B_1 에서 0 값을 가진다고 하자. 그러면 u는 $B_1(0)$ 전체에서 0 인 상수함수이다.

증명

일반성을 잃지 않고, $|u| \leq 1$ 이라 하자. 임의의 작은 양수 ϵ 에 대하여,
$v_\epsilon(x) := \frac{\frac{1}{|x|^{n-2}}-1}{\frac{1}{\epsilon^{n-2}}-1}$ 라 하면 v 는 $B_1 \setminus B_\epsilon$ 에서 조화함수이고, $v = 0, |x| = 1$,
$v = 1, |x| = \epsilon$.

정리

만일 두 번 미분 가능한 함수 u 가 존재하여 $B_1(0) \setminus \{0\}$ 에서 조화함수이고 유계라고 하자. 그리고 ∂B_1 에서 0 값을 가진다고 하자. 그러면 u는 $B_1(0)$ 전체에서 0 인 상수함수이다.

증명

일반성을 잃지 않고, $|u| \leq 1$ 이라 하자. 임의의 작은 양수 ϵ 에 대하여,
$v_\epsilon(x) := \frac{\frac{1}{|x|^{n-2}}-1}{\frac{1}{\epsilon^{n-2}}-1}$ 라 하면 v 는 $B_1 \setminus B_\epsilon$ 에서 조화함수이고, $v = 0, |x| = 1$,
$v = 1, |x| = \epsilon$.
즉, $v \geq \pm u$ 를 $\partial(B_1 \setminus B_\epsilon)$ 에서 만족한다.

Removable singularity

정리

만일 두 번 미분 가능한 함수 u 가 존재하여 $B_1(0) \setminus \{0\}$ 에서 조화함수이고 유계라고 하자. 그리고 ∂B_1 에서 0 값을 가진다고 하자. 그러면 u는 $B_1(0)$ 전체에서 0 인 상수함수이다.

증명

일반성을 잃지 않고, $|u| \le 1$ 이라 하자. 임의의 작은 양수 ϵ 에 대하여,

$v_\epsilon(x) := \frac{\frac{1}{|x|^{n-2}} - 1}{\frac{1}{\epsilon^{n-2}} - 1}$ 라 하면 v 는 $B_1 \setminus B_\epsilon$ 에서 조화함수이고, $v = 0, |x| = 1$, $v = 1, |x| = \epsilon$.

즉, $v \ge \pm u$ 를 $\partial(B_1 \setminus B_\epsilon)$ 에서 만족한다.

비교원리에 의해 $\pm u \le v := \frac{\frac{1}{|x|^{n-2}} - 1}{\frac{1}{\epsilon^{n-2}} - 1}$ in $B_1 \setminus B_\epsilon$.

Removable singularity

정리

만일 두 번 미분 가능한 함수 u 가 존재하여 $B_1(0) \setminus \{0\}$ 에서 조화함수이고 유계라고 하자. 그리고 ∂B_1 에서 0 값을 가진다고 하자. 그러면 u는 $B_1(0)$ 전체에서 0 인 상수함수이다.

증명

일반성을 잃지 않고, $|u| \leq 1$ 이라 하자. 임의의 작은 양수 ϵ 에 대하여,
$v_\epsilon(x) := \frac{\frac{1}{|x|^{n-2}}-1}{\frac{1}{\epsilon^{n-2}}-1}$ 라 하면 v 는 $B_1 \setminus B_\epsilon$ 에서 조화함수이고, $v = 0, |x| = 1$,
$v = 1, |x| = \epsilon$.
즉, $v \geq \pm u$ 를 $\partial(B_1 \setminus B_\epsilon)$ 에서 만족한다.
비교원리에 의해 $\pm u \leq v := \frac{\frac{1}{|x|^{n-2}}-1}{\frac{1}{\epsilon^{n-2}}-1}$ in $B_1 \setminus B_\epsilon$.
임의의 $x_0 \in B_1 \setminus \{0\}$ 에 대해, $\epsilon \to 0^+$ 함에 따라 $|u(x_0)| \leq v(x_0) \to 0$.

Removable singularity

정리

만일 두 번 미분 가능한 함수 u 가 존재하여 $B_1(0) \setminus \{0\}$ 에서 조화함수이고 유계라고 하자. 그리고 ∂B_1 에서 0 값을 가진다고 하자. 그러면 u는 $B_1(0)$ 전체에서 0 인 상수함수이다.

증명

일반성을 잃지 않고, $|u| \le 1$ 이라 하자. 임의의 작은 양수 ϵ 에 대하여,
$v_\epsilon(x) := \frac{\frac{1}{|x|^{n-2}}-1}{\frac{1}{\epsilon^{n-2}}-1}$ 라 하면 v 는 $B_1 \setminus B_\epsilon$ 에서 조화함수이고, $v = 0, |x| = 1$,
$v = 1, |x| = \epsilon$.
즉, $v \ge \pm u$ 를 $\partial(B_1 \setminus B_\epsilon)$ 에서 만족한다.
비교원리에 의해 $\pm u \le v := \frac{\frac{1}{|x|^{n-2}}-1}{\frac{1}{\epsilon^{n-2}}-1}$ in $B_1 \setminus B_\epsilon$.
임의의 $x_0 \in B_1 \setminus \{0\}$ 에 대해, $\epsilon \to 0^+$ 함에 따라 $|u(x_0)| \le v(x_0) \to 0$.
따라서, $u \equiv 0$ in B_1.

개요

논다이버젼스(Nondivergence) 형태의 타원형 연산자

논다이버젼스(Nondivergence) 형태의 타원형 연산자

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{ij} u(x) = 0, \quad a.e. \tag{ND}$$

for $u \in W^{2,p}(C^{2,\alpha})$, $p \in (1, \infty)$.

논다이버젼스(Nondivergence) 형태의 타원형 연산자

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{ij} u(x) = 0, \quad a.e. \tag{ND}$$

for $u \in W^{2,p}(C^{2,\alpha})$, $p \in (1, \infty)$. 여기서 a_{ij}는 어떤 $\nu \in (0,1]$ 가 존재하여,

$$\nu |\xi|^2 \le a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \le \nu^{-1} |\xi|^2, \tag{U}$$

$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.

논다이버전스(Nondivergence) 형태의 타원형 연산자

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_{ij} u(x) = 0, \quad a.e. \tag{ND}$$

for $u \in W^{2,p}(C^{2,\alpha})$, $p \in (1, \infty)$. 여기서 a_{ij}는 어떤 $\nu \in (0,1]$ 가 존재하여,

$$\nu|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \nu^{-1}|\xi|^2, \tag{U}$$

$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$.
만일 $a_{ij} = \delta_{ij}$ 이면 L 은 Δ 가 된다.

다이버전스(divergence) 형태의 타원형 연산자

다이버전스(divergence) 형태의 타원형 연산자

만일 u 가 조화함수이면

$$0 = \int_{\Omega} div\nabla u\phi$$

만일 u 가 조화함수이면

$$0 = \int_\Omega div \nabla u \phi = -\int_\Omega \nabla u \nabla \phi$$

다이버젼스(divergence) 형태의 타원형 연산자

만일 u 가 조화함수이면

$$0 = \int_\Omega div \nabla u \phi = - \int_\Omega \nabla u \nabla \phi = \int_\Omega u \Delta \phi = 0$$

다이버전스(divergence) 형태의 타원형 연산자

만일 u 가 조화함수이면

$$0 = \int_\Omega div\nabla u\phi = -\int_\Omega \nabla u\nabla\phi = \int_\Omega u\Delta\phi = 0$$

$\forall$ test function $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

다이버젼스(divergence) 형태의 타원형 연산자

만일 u 가 조화함수이면

$$0 = \int_\Omega div \nabla u \phi = - \int_\Omega \nabla u \nabla \phi = \int_\Omega u \Delta \phi = 0$$

$\forall$ test function $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.
만일

$$\int_\Omega \sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x) D_j u(x) D_i \phi(x) dx = 0 \tag{D}$$

다이버젼스(divergence) 형태의 타원형 연산자

만일 u 가 조화함수이면

$$0 = \int_\Omega div \nabla u \phi = - \int_\Omega \nabla u \nabla \phi = \int_\Omega u \Delta \phi = 0$$

$\forall$ test function $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.
만일

$$\int_\Omega \sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x) D_j u(x) D_i \phi(x) dx = 0 \tag{D}$$

$\forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ 이면
함수 u 는 약한의미의 조화함수 (harmonic in a weak sense) 라고 한다.

다이버젼스(divergence) 형태의 타원형 연산자

만일 u 가 조화함수이면

$$0 = \int_\Omega div\nabla u\phi = -\int_\Omega \nabla u\nabla\phi = \int_\Omega u\Delta\phi = 0$$

$\forall$ test function $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.
만일

$$\int_\Omega \sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x)D_j u(x)D_i\phi(x)dx = 0 \qquad \text{(D)}$$

$\forall\ \phi \in C_0^\infty(\Omega)$ 이면
함수 u 는 약한의미의 조화함수 (harmonic in a weak sense) 라고 한다.

경계치 문제의 예

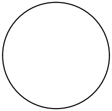
예 I:

경계치 문제의 예

예 I: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1; \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1. \end{cases}$

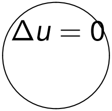
경계치 문제의 예

예 I: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1; \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1. \end{cases}$



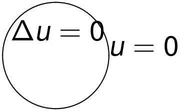
경계치 문제의 예

예 I: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1; \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1. \end{cases}$



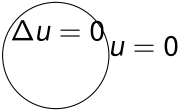
경계치 문제의 예

예 I: $$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1; \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1. \end{cases}$$



경계치 문제의 예

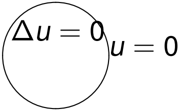
예 I: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1; \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1. \end{cases}$



답:

경계치 문제의 예

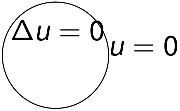
예 I: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1; \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1. \end{cases}$



답: 상수함수 0 이 해이며,

경계치 문제의 예

예 I: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1; \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1. \end{cases}$



답: 상수함수 0 이 해이며, 해는 최대치 원리에 의해 유일하다.

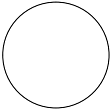
예 II:

경계치 문제의 예

예 II: $\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{in } B_1 \setminus \{0\}; \\ u = 0 \quad \text{on } \partial B_1, \\ u(0) = 1. \end{cases}$

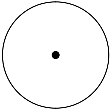
경계치 문제의 예

예 II: $\begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ in } B_1 \setminus \{0\}; \\ u = 0 \quad \text{on } \partial B_1, \\ u(0) = 1. \end{cases}$



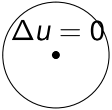
경계치 문제의 예

예 II: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1 \setminus \{0\}; \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1, \\ u(0) = 1. \end{cases}$



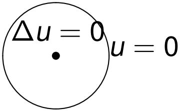
경계치 문제의 예

예 II: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1 \setminus \{0\}; \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1, \\ u(0) = 1. \end{cases}$



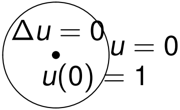
경계치 문제의 예

예 II: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1 \setminus \{0\}; \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1, \\ u(0) = 1. \end{cases}$



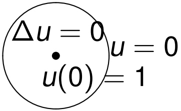
경계치 문제의 예

예 II: $\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{in } B_1 \setminus \{0\}; \\ u = 0 \quad \text{on } \partial B_1, \\ u(0) = 1. \end{cases}$



경계치 문제의 예

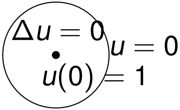
예 II: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1 \setminus \{0\}; \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1, \\ u(0) = 1. \end{cases}$



답:

경계치 문제의 예

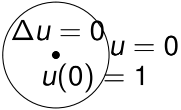
예 II: $\begin{cases} \Delta u = 0 \ \text{ in } B_1 \setminus \{0\}; \\ u = 0 \quad \text{on } \partial B_1, \\ u(0) = 1. \end{cases}$



답: 비교원리에 의해 $0 \le u \le v := \dfrac{\frac{1}{|x|^{n-2}} - 1}{\frac{1}{\epsilon^{n-2}} - 1}$ in $B_1 \setminus B_\epsilon$ 이 성립한다.

경계치 문제의 예

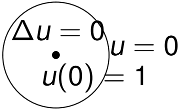
예 II: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1 \setminus \{0\}; \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1, \\ u(0) = 1. \end{cases}$



답: 비교원리에 의해 $0 \le u \le v := \frac{\frac{1}{|x|^{n-2}} - 1}{\frac{1}{\epsilon^{n-2}} - 1}$ in $B_1 \setminus B_\epsilon$ 이 성립한다.
임의의 $x_0 \in B_1 \setminus \{0\}$, $0 \le u(x_0) \le v(x_0) \to 0$ as $\epsilon \to 0^+$.

경계치 문제의 예

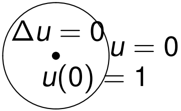
예 II: $\begin{cases} \Delta u = 0 \quad \text{in } B_1 \setminus \{0\}; \\ u = 0 \quad \text{on } \partial B_1, \\ u(0) = 1. \end{cases}$



답: 비교원리에 의해 $0 \le u \le v := \dfrac{\frac{1}{|x|^{n-2}} - 1}{\frac{1}{\epsilon^{n-2}} - 1}$ in $B_1 \setminus B_\epsilon$ 이 성립한다.
임의의 $x_0 \in B_1 \setminus \{0\}$, $0 \le u(x_0) \le v(x_0) \to 0$ as $\epsilon \to 0^+$.
따라서 $u \equiv 0$ in B_1.

경계치 문제의 예

예 II: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_1 \setminus \{0\}; \\ u = 0 & \text{on } \partial B_1, \\ u(0) = 1. \end{cases}$



답: 비교원리에 의해 $0 \le u \le v := \dfrac{\frac{1}{|x|^{n-2}} - 1}{\frac{1}{\epsilon^{n-2}} - 1}$ in $B_1 \setminus B_\epsilon$ 이 성립한다.
임의의 $x_0 \in B_1 \setminus \{0\}$, $0 \le u(x_0) \le v(x_0) \to 0$ as $\epsilon \to 0^+$.
따라서 $u \equiv 0$ in B_1.
결론적으로 위의 경계치 문제의 해는 존재하지 않는다.

반례 (ND) (D. Gilbarg & J. Serrin)

반례 (ND) (D. Gilbarg & J. Serrin)

$u = 1 - |x|^{\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$,

반례 (ND) (D. Gilbarg & J. Serrin)

$u = 1 - |x|^{\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$,
$a_{ij} = \nu_0 \delta_{ij} + (c - \nu_0)\frac{x_i x_j}{|x|^2}$, $c := \frac{(n-1)\nu_0}{1-\alpha}$.

반례 (ND) (D. Gilbarg & J. Serrin)

$u = 1 - |x|^{\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$,
$a_{ij} = \nu_0 \delta_{ij} + (c - \nu_0)\frac{x_i x_j}{|x|^2}$, $c := \frac{(n-1)\nu_0}{1-\alpha}$.

$$D_i u = -\alpha x_i |x|^{\alpha-2}, \quad D_{ij} u = -\alpha \delta_{ij} |x|^{\alpha-2} - \alpha(\alpha - 2) x_i x_j |x|^{\alpha-4}$$

반례 (ND) (D. Gilbarg & J. Serrin)

$u = 1 - |x|^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$,
$a_{ij} = \nu_0 \delta_{ij} + (c - \nu_0)\frac{x_i x_j}{|x|^2}$, $c := \frac{(n-1)\nu_0}{1-\alpha}$.

$$D_i u = -\alpha x_i |x|^{\alpha-2}, \quad D_{ij} u = -\alpha\delta_{ij}|x|^{\alpha-2} - \alpha(\alpha-2)x_i x_j |x|^{\alpha-4}$$

$$\begin{aligned}
a_{ij} D_{ij} u &= -\alpha|x|^{\alpha-2}\left(\nu_0\delta_{ij} + (c-\nu_0)\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right)\left(\delta_{ij} + (\alpha-2)\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right) \\
&= -\alpha|x|^{\alpha-2}\left(\nu_0 n + \nu_0(\alpha-2) + (c-\nu_0) + (c-\nu_0)(\alpha-2)\right) \\
&= -\alpha|x|^{\alpha-2}\left(\nu_0 n + (c-\nu_0) + c(\alpha-2)\right) \\
&= -\alpha|x|^{\alpha-2}\left(\nu_0(n-1) + c(\alpha-1)\right) = 0.
\end{aligned}$$

경계치 근처에서의 근의 수렴, 발산

경계치 근처에서의 근의 수렴, 발산

- 근의 경계치 근처에서의 수렴성은 해의 존재성, 정칙성, 안정성과 관련이 있다.
발산하거나, 불연속인 근들은 다루기 어렵다.

경계치 근처에서의 근의 수렴, 발산

- 근의 경계치 근처에서의 수렴성은 해의 존재성, 정칙성, 안정성과 관련이 있다.
발산하거나, 불연속인 근들은 다루기 어렵다.

- 이러한 경계치 근처에서의 근의 형태는 편미분 방정식 뿐만 아니라, 경계 자체의 기하학적인 성질에도 의존한다.

Example I

$u(x_1, x_2) = x_2$ in $\Omega = \mathbb{R}^2_+ := \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 > 0\}$

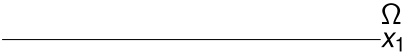
Example I

$u(x_1, x_2) = x_2$ in $\Omega = \mathbb{R}^2_+ := \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 > 0\}$

x_1

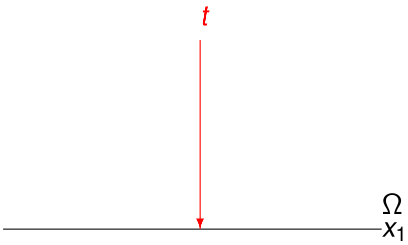
Example I

$$u(x_1, x_2) = x_2 \text{ in } \Omega = \mathbb{R}^2_+ := \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 > 0\}$$



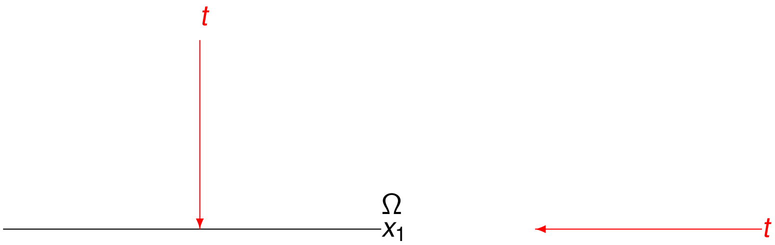
Example I

$$u(x_1, x_2) = x_2 \text{ in } \Omega = \mathbb{R}^2_+ := \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 > 0\}$$



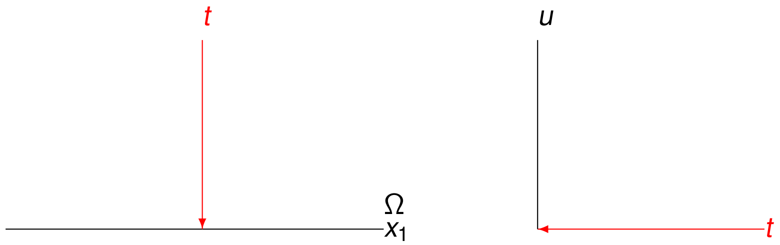
Example I

$u(x_1, x_2) = x_2$ in $\Omega = \mathbb{R}^2_+ := \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 > 0\}$



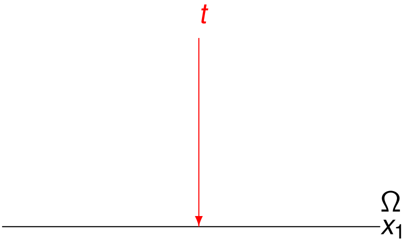
Example I

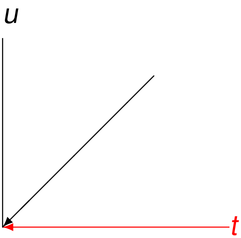
$$u(x_1, x_2) = x_2 \text{ in } \Omega = \mathbb{R}^2_+ := \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 > 0\}$$



Example I

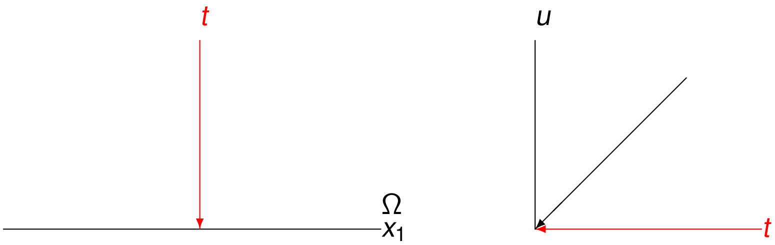
$$u(x_1, x_2) = x_2 \text{ in } \Omega = \mathbb{R}^2_+ := \{(x_1, x_2)\,|\,x_2 > 0\}$$





Example I

$u(x_1, x_2) = x_2$ in $\Omega = \mathbb{R}^2_+ := \{(x_1, x_2) \,|\, x_2 > 0\}$



$$u(x) = d(x), \text{ where } d(x) = dist(x, \partial\Omega).$$

Example II

$u(x) = x_1 x_2$ in $\Omega := \{(x_1, x_2) \,|\, x_1, x_2 > 0\}$

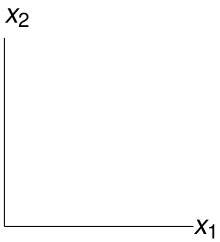
Example II

$u(x) = x_1 x_2$ in $\Omega := \{(x_1, x_2) \,|\, x_1, x_2 > 0\}$

x_1

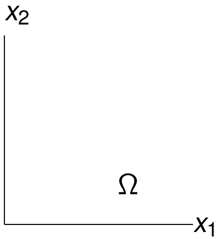
Example II

$u(x) = x_1 x_2$ in $\Omega := \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 > 0\}$



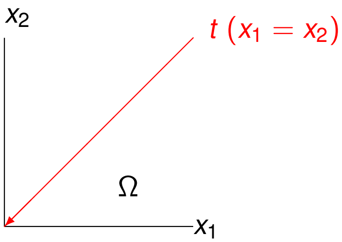
Example II

$$u(x) = x_1 x_2 \text{ in } \Omega := \{(x_1, x_2) \,|\, x_1, x_2 > 0\}$$



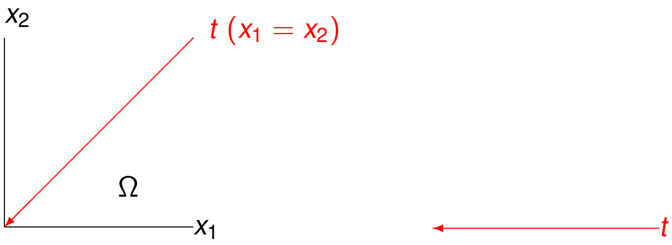
Example II

$u(x) = x_1 x_2$ in $\Omega := \{(x_1, x_2) \,|\, x_1, x_2 > 0\}$



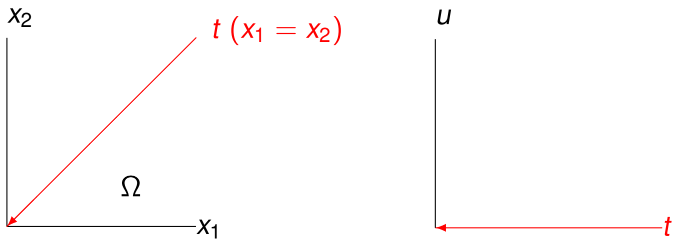
Example II

$u(x) = x_1 x_2$ in $\Omega := \{(x_1, x_2) \,|\, x_1, x_2 > 0\}$



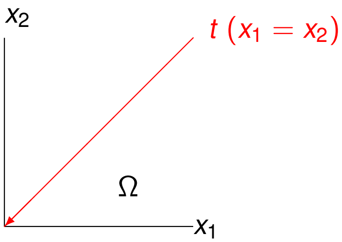
Example II

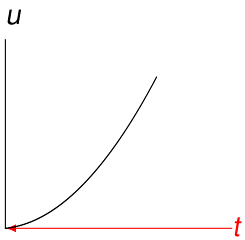
$u(x) = x_1 x_2$ in $\Omega := \{(x_1, x_2) \,|\, x_1, x_2 > 0\}$



Example II

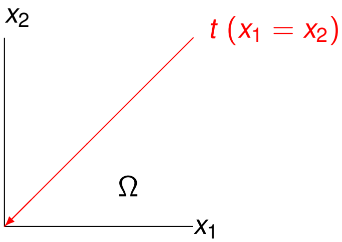
$$u(x) = x_1 x_2 \text{ in } \Omega := \{(x_1, x_2) \,|\, x_1, x_2 > 0\}$$

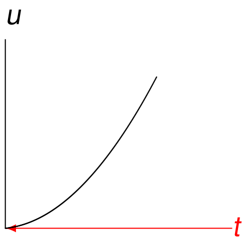




Example II

$$u(x) = x_1 x_2 \text{ in } \Omega := \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 > 0\}$$





$$u(x) = d^2(x) \text{ as } x \to 0 \text{ along line } t.$$

최대치 원리 ((D) 와 (ND)):

최대치 원리 ((D) 와 (ND)):

- 최대치 원리: 만일 $Lu \geq 0$ in Ω 이면

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

최대치 원리 ((D) 와 (ND)):

- 최대치 원리: 만일 $Lu \geq 0$ in Ω 이면

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} u.$$

- 비교 원리: 만일 $Lu \leq Lv$ in Ω, $u \geq v$ on $\partial\Omega$ 이면 $u \geq v$ in Ω.

개요

(A)-domain

(A)-domain

(A)-domain

Definition

다음 조건을 만족하는 도메인 Ω 를 (A)-domain 이라고 한다:
$\exists \theta_0 > 0$, $\forall y \in \partial\Omega$, $r > 0$ 에 대하여

(A)-domain

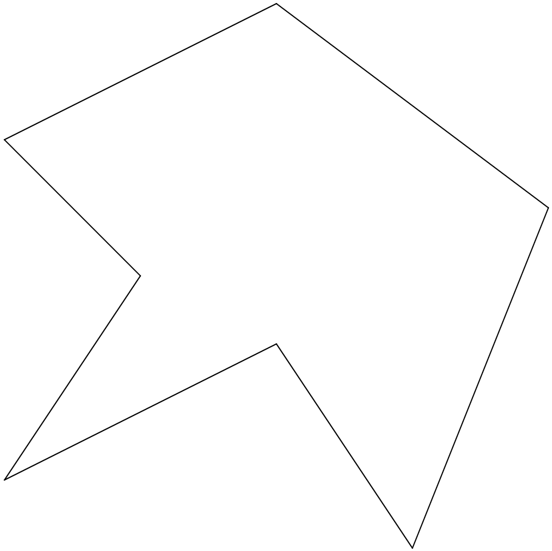
Definition

다음 조건을 만족하는 도메인 Ω 를 (A)-domain 이라고 한다:
$\exists \theta_0 > 0, \forall y \in \partial\Omega, r > 0$ 에 대하여

$$|B_r(y) \setminus \Omega| \geq \theta_0 |B_r|. \tag{A}$$

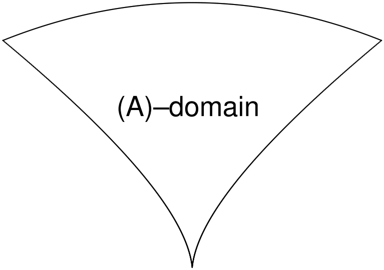
립쉽츠(Lipschitz) 도메인은 (A) 도메인이다.

립쉽츠(Lipschitz) 도메인은 (A) 도메인이다.

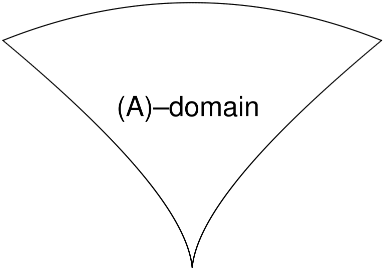


예와 반례

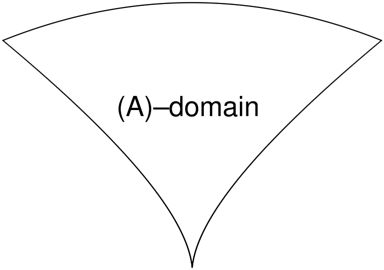
예와 반례

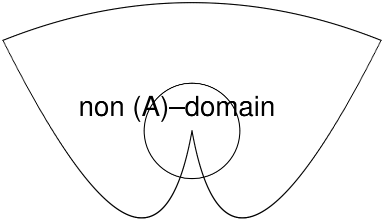


예와 반례

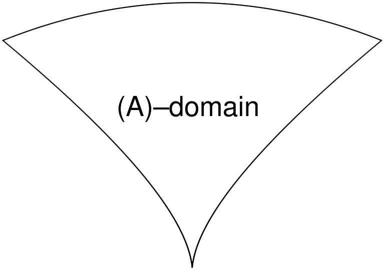


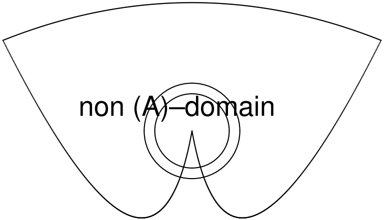
예와 반례



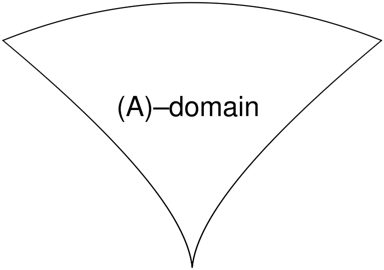


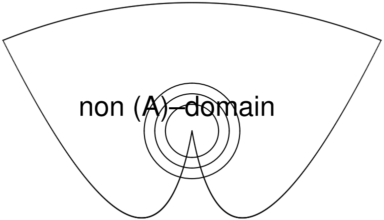
예와 반례



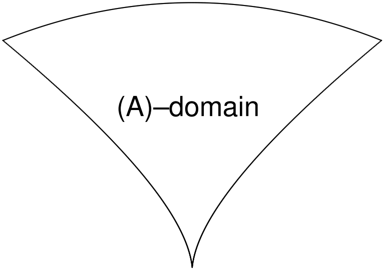


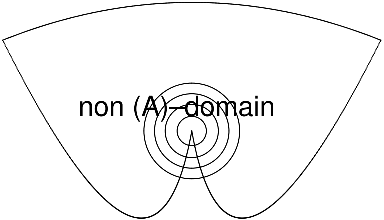
예와 반례





예와 반례



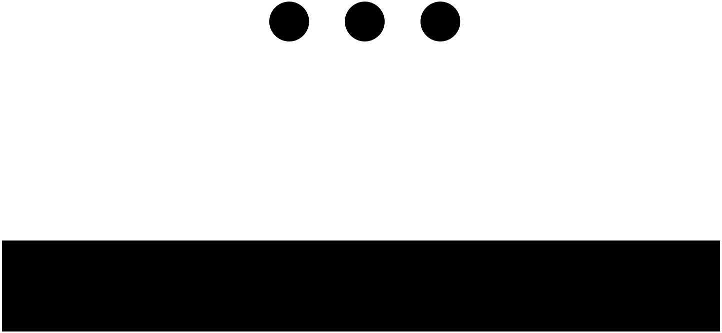


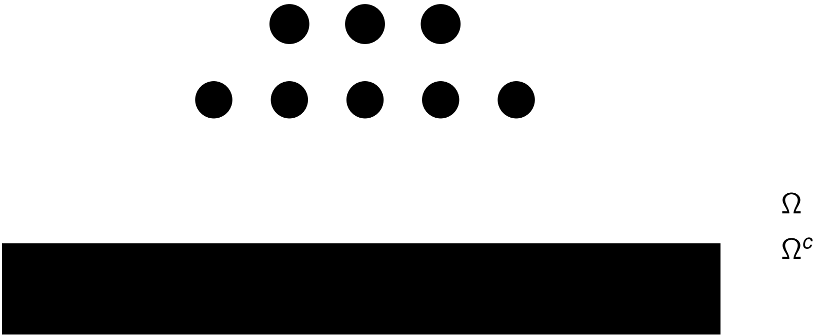
복잡한 (A) 도메인의 예

Ω

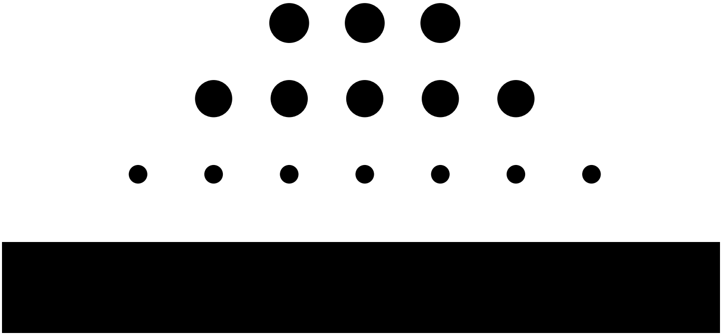
Ω^c

복잡한 (A) 도메인의 예




Ω
Ω^c

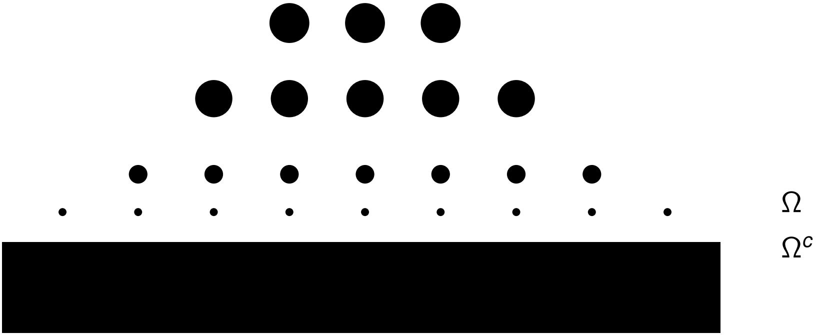
복잡한 (A) 도메인의 예



Ω

Ω^c

복잡한 (A) 도메인의 예



경계값 문제:

경계값 문제:

$$(DP)\ \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

경계값 문제:

$$
(DP)\ \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}
$$

$$
Lu := \sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij} D_j u) + \sum_{i=1}^{n} [D_i(c_i u) + b_i D_i u] + c_0 u. \tag{D}
$$

또는

$$
Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i u + c_0 u, \tag{ND}
$$

경계값 문제:

$$(DP)\ \begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}D_j u) + \sum_{i=1}^{n} [D_i(c_i u) + b_i D_i u] + c_0 u. \qquad \text{(D)}$$

또는

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i u + c_0 u, \qquad \text{(ND)}$$

$[a_{ij}] = [a_{ij}(x)]$ 는 엘립틱 *(uniform elliptic)* 조건을 만족한다.

$$\exists \nu \in (0,1], \quad \nu|\xi|^2 \le a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \quad \sup_{i,j} |a_{ij}(x)| \le \nu^{-1}. \qquad \text{(U)}$$

근의 존재성에 관한 결과 (김 도윤 & 조 성원)

근의 존재성에 관한 결과 (김 도윤 & 조 성원)

정리

L 이 다이버젼스나 논다이버젼스 형의 타원형 (uniformly elliptic (D) 또는 (ND) 형태의) 연산자이고, $L1 \leq 0$ 을 만족시키고, Ω 는 유계인 n-차원의 (A) 도메인이라 하자.

근의 존재성에 관한 결과 (김 도윤 & 조 성원)

정리

L 이 다이버젼스나 논다이버젼스 형의 타원형 (uniformly elliptic (D) *또는* (ND) *형태의) 연산자이고,* $L1 \le 0$ *을 만족시키고,* Ω *는 유계인 n-차원의 (A) 도메인이라 하자. 또한* $K \ge 0$*, and* $\beta \in (0, \beta_1)$ *에 대해*

$$|b_i|, |c_i| \le Kd^{-1}, \quad c_0 \in L^{\infty}_{loc}(\Omega), \quad \sup_{\Omega} d^{2-\beta}|f| < \infty, \quad d =: dist(x, \partial\Omega),$$

$\beta_1 := \beta_1(n, \nu, \theta_0, K) = -\log_4 \beta_0$ β_0 *는 Growth Lemma 를 만족하는 상수이다.*

근의 존재성에 관한 결과 (김 도윤 & 조 성원)

정리

L 이 다이버젼스나 논다이버젼스 형의 타원형 (uniformly elliptic (D) 또는 (ND) 형태의) 연산자이고, $L1 \le 0$ 을 만족시키고, Ω 는 유계인 n-차원의 (A) 도메인이라 하자. 또한 $K \ge 0$, and $\beta \in (0, \beta_1)$ 에 대해

$$|b_i|, |c_i| \le Kd^{-1}, \quad c_0 \in L^{\infty}_{loc}(\Omega), \quad \sup_{\Omega} d^{2-\beta}|f| < \infty, \quad d =: dist(x, \partial\Omega),$$

$\beta_1 := \beta_1(n, \nu, \theta_0, K) = -\log_4 \beta_0$ β_0 는 Growth Lemma 를 만족하는 상수이다.
논다이버젼스의 경우 a_{ij} 가 BMO 조건을 만족한다고 하자.

근의 존재성에 관한 결과 (김 도윤 & 조 성원)

정리

L 이 다이버젼스나 논다이버젼스 형의 타원형 (uniformly elliptic (D) *또는* (ND) *형태의) 연산자이고, $L1 \le 0$ 을 만족시키고, Ω 는 유계인 n-차원의 (A) 도메인이라 하자. 또한 $K \ge 0$, and $\beta \in (0, \beta_1)$ 에 대해*

$$|b_i|, |c_i| \le Kd^{-1}, \quad c_0 \in L^{\infty}_{loc}(\Omega), \quad \sup_{\Omega} d^{2-\beta}|f| < \infty, \quad d =: dist(x, \partial\Omega),$$

$\beta_1 := \beta_1(n, \nu, \theta_0, K) = -\log_4 \beta_0$ β_0 *는 Growth Lemma 를 만족하는 상수이다.*
논다이버젼스의 경우 a_{ij} 가 BMO 조건을 만족한다고 하자.
그러면, 우리의 경계치 문제 (DP)의 유일한 해($u \in W(\Omega)$)가 존재한다.

경청해 주셔서 대단히 감사합니다.

경청해 주셔서 대단히 감사합니다.

Growth lemma for (D) and (ND):

Lemma (Growth Lemma)

Let $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$,

$$|B_r \setminus \Omega| \geq \theta \, |B_r| \, , \quad \theta > 0, \tag{1}$$

where $B_r := B_r(x_0)$. *Then for any function* $u \in W(\Omega)$, *satisfying* $u > 0$, $Lu \geq 0$ *in* Ω, *and* $u = 0$ *on* $(\partial\Omega) \cap B_{4r}$,

$$\sup_{B_r} u \leq \beta_0 \cdot \sup_{B_{4r}} u = \beta_0 \cdot \sup_{\partial B_{4r}} u, \tag{2}$$

$\beta_0 = \beta_0 \, (n, \nu, \theta) \in (0, 1) \, .$

In case (D), the lemma is known by Landis, Kondrat'ev.
In case (ND), by Safonov.
For the parabolic case, it is done by Ferretti & Safonov, Landis.

In the non-divergence case, we impose the BMO condition (or *small mean oscillation condition*) on a_{ij}, where $\gamma \in (0,1)$ is a fixed constant.

가정 (γ)

There is a constant $R_0 \in (0,1]$ such that, for any $x_0 \in \mathbb{R}^n$ and ball $B := B_r(x_0)$ with $r \le R_0$, $i,j = 1, ..., n$,

$$\fint_B |a_{ij}(x) - \fint_B a_{ij}(y)\,dy|\,dx \le \gamma, \tag{3}$$

where $\fint_B f(y)\,dy$ is the average of f over B.

정의 (Our Solution Space $W(\Omega)$)

(i) In the divergence case (D), $W(\Omega) := W^{1,2}_{loc}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.
(ii) In the non-divergence case (ND), $W(\Omega) := W^{2,n}_{loc}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

Theorem (Doyoon Kim, Krylov)

Let $p \in [n, \infty)$, Ω be a bounded $C^{1,1}$ domain, and L be a uniformly elliptic operator of non-divergence (ND) *form with bounded b_i, c_0. Then there exists a constant $\gamma = \gamma(n, \nu, p)$ such that under Assumption (γ): For any $f \in L^p(\Omega)$, there is a unique solution $u \in W^{2,p}(\Omega)$ to the equation*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

참고

More general results become available by Doyoon, Krylov, Dong.
Also Byun, Wang for divergence case.