미분 가능성과 매우 큰 자연수

권도용 (전남대)

무등수학강연회

2011년 12월 28일

§. 연속 함수열 – 점별 수렴 (pointwise convergence)

- **질문:** 구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속 함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 점별 수렴하면 f는 연속일까?

§. 연속 함수열 – 점별 수렴 (pointwise convergence)

- **질문:** 구간 $[0,1]$에서 정의된 연속 함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 점별 수렴하면 f는 연속일까?
  - **답:** 아니요.

§. 연속 함수열 – 점별 수렴 (pointwise convergence)

- **질문:** 구간 $[0,1]$에서 정의된 연속 함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 점별 수렴하면 f는 연속일까?
  - **답:** 아니요.

보기. 구간 $[0,1]$에서 정의된 함수열

$$f_n(x) = x^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

은 모두 연속이지만 그것의 점별 극한은

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

이므로 연속이 아니다.

§. 연속 함수열 – 고른 수렴 (uniform convergence)

- **질문:** 구간 $[0,1]$에서 정의된 연속 함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 고르게 수렴하면 f는 연속일까?

§. 연속 함수열 – 고른 수렴 (uniform convergence)

- **질문:** 구간 $[0, 1]$에서 정의된 연속 함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 고르게 수렴하면 f는 연속일까?
  - **답:** 예.

§. 연속 함수열 – 고른 수렴 (uniform convergence)

- **질문:** 구간 $[0,1]$에서 정의된 연속 함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 고르게 수렴하면 f는 연속일까?
  - **답:** 예.

정리. *$\mathbb{R}$의 부분집합 X에서 Y로 가는 연속 함수열 $\{f_n\}$이 f로 고르게 수렴하면 f는 연속이다.*

§. 미분가능 함수열 – 고른 수렴 (uniform convergence)

- **질문:** 구간 $[0,1]$에서 정의된 미분 가능 함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 고르게 수렴하면 f는 미분가능할까?

§. 미분가능 함수열 – 고른 수렴 (uniform convergence)

- **질문:** 구간 $[0, 1]$에서 정의된 미분 가능 함수열 $\{f_n\}$이 함수 f로 고르게 수렴하면 f는 미분가능할까?
  - **답:** 아니요.

§. 모든 실수에서 미분 불능인 연속함수

보기. 미분 가능 함수열

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(3^k x)}{2^k}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

은 다음 함수 f로 고르게 수렴한다. ($\because$ Weierstrass M-test)

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(3^k x)}{2^k}.$$

따라서, f는 연속이다.

§. 모든 실수에서 미분 불능인 연속함수

보기. 미분 가능 함수열

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(3^k x)}{2^k}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

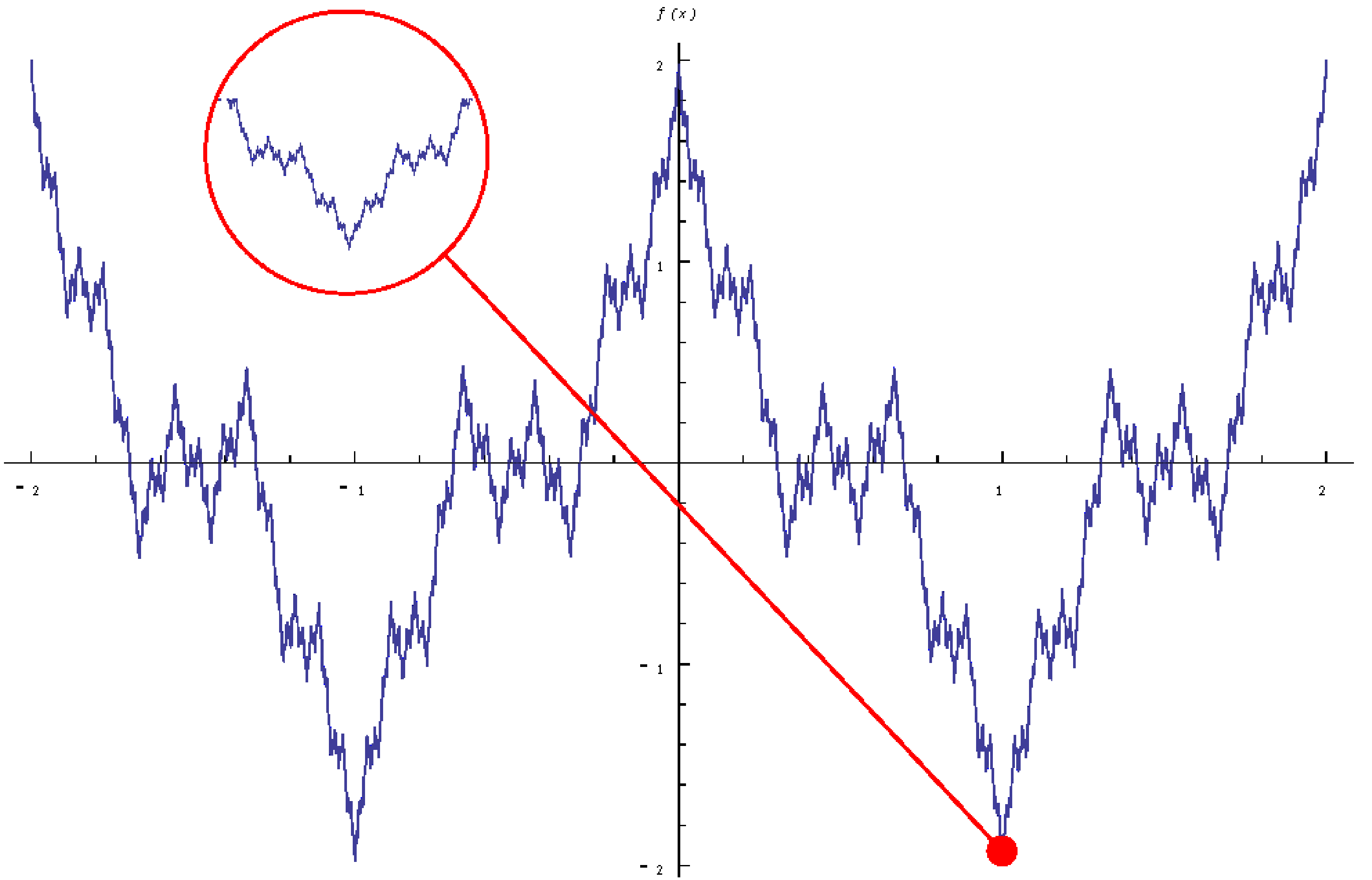
은 다음 함수 f로 고르게 수렴한다. ($\because$ Weierstrass M-test)

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(3^k x)}{2^k}.$$

따라서, f는 연속이다.

정리 (Weierstrass, 1872). 함수 $f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(3^k x)}{2^k}$는 모든 실수에서 미분 가능하지 않다.

§. Weierstrass 함수의 그래프



§. 구간 $[0,1]$의 모든 점에서 미분 불능인 연속함수

보기. 실수 t에 대하여 $\|t\|$를 t로 부터 가장 가까운 정수까지의 거리라 하자. 즉,

$$\|\pi\| = \qquad\qquad, \qquad \|e\| = $$

이다.

§. 구간 $[0, 1]$의 모든 점에서 미분 불능인 연속함수

보기. 실수 t에 대하여 $\|t\|$를 t로 부터 가장 가까운 정수까지의 거리라 하자. 즉,

$$\|\pi\| = \pi - 3, \qquad \|e\| =$$

이다.

§. 구간 $[0,1]$의 모든 점에서 미분 불능인 연속함수

보기. 실수 t에 대하여 $\|t\|$를 t로 부터 가장 가까운 정수까지의 거리라 하자. 즉,

$$\|\pi\| = \pi - 3, \qquad \|e\| = 3 - e$$

이다.

§. 구간 $[0,1]$의 모든 점에서 미분 불능인 연속함수

보기. 실수 t에 대하여 $\|t\|$를 t로 부터 가장 가까운 정수까지의 거리라 하자. 즉,

$$\|\pi\| = \pi - 3, \qquad \|e\| = 3 - e$$

이다. 자연수 n에 대해 구간 $[0,1]$에서 정의된 함수

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\|2^k x\|}{2^k}$$

은 연속이고, 유한개의 점을 제외하고 모두 미분 가능하다. 또 함수열 $\{f_n\}$은 함수 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|2^k x\|}{2^k}$로 고르게 수렴한다.

§. 구간 $[0,1]$의 모든 점에서 미분 불능인 연속함수

보기. 실수 t에 대하여 $\|t\|$를 t로 부터 가장 가까운 정수까지의 거리라 하자. 즉,

$$\|\pi\| = \pi - 3, \qquad \|e\| = 3 - e$$

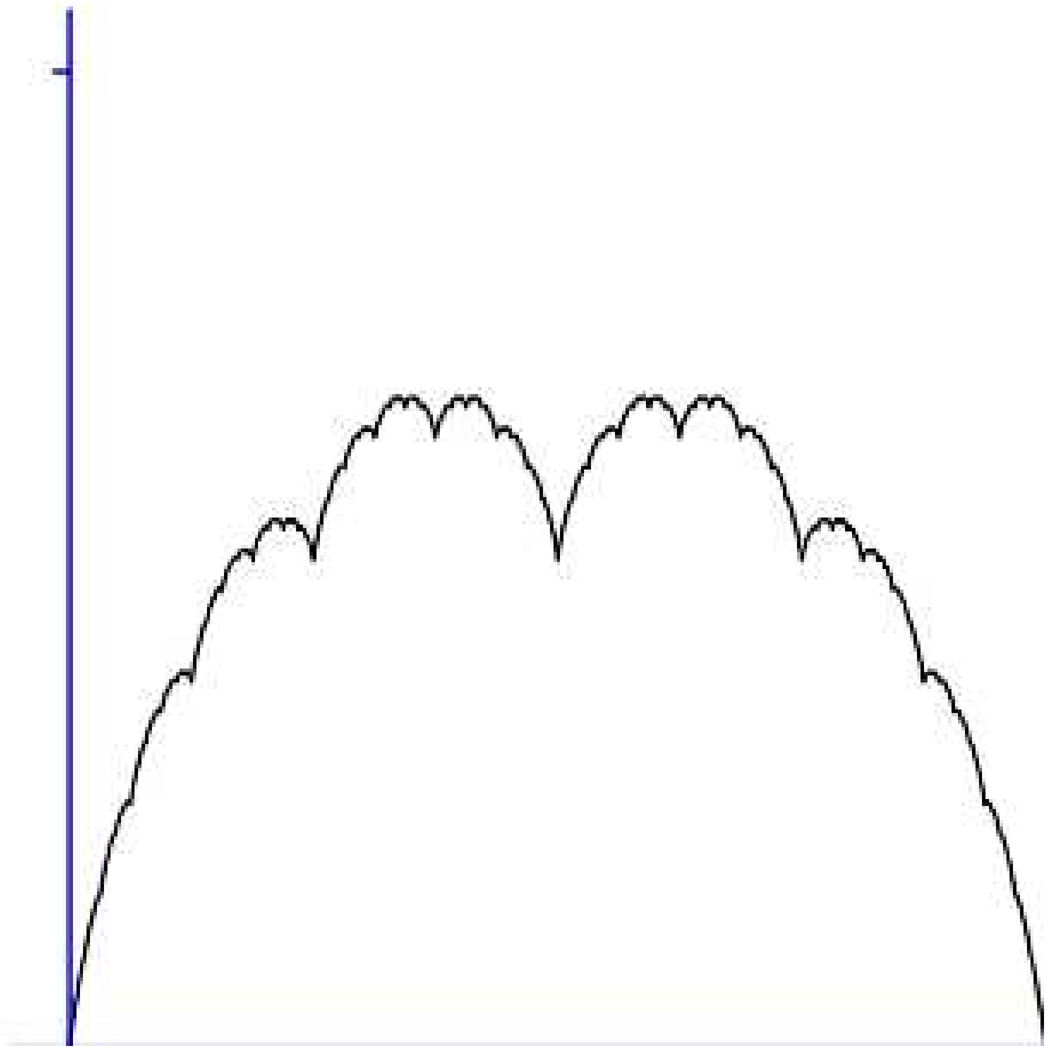
이다. 자연수 n에 대해 구간 $[0,1]$에서 정의된 함수

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\|2^k x\|}{2^k}$$

은 연속이고, 유한개의 점을 제외하고 모두 미분 가능하다. 또 함수열 $\{f_n\}$은 함수 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|2^k x\|}{2^k}$로 고르게 수렴한다.

정리 (Takagi, 1903). *함수 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|2^k x\|}{2^k}$는 구간 $[0,1]$의 모든 점에서 미분 가능하지 않은 연속함수이다.*

§. Takagi 함수의 그래프



§. 본 강연의 목표

- **질문:** 연속함수는 어느 정도나 미분 불가능할까?

§. 본 강연의 목표

- **질문:** 연속함수는 어느 정도나 미분 불가능할까?
  - **답:** 완전히 미분 불가능할 수도 있다. (예: Weierstrass 함수, Takagi 함수)

§. 본 강연의 목표

- **질문:** 연속함수는 어느 정도나 미분 불가능할까?
  - **답:** 완전히 미분 불가능할 수도 있다. (예: Weierstrass 함수, Takagi 함수)
- **본 강연의 질문:** 불연속함수는 어느 정도나 미분 가능할까?

§. 본 강연의 목표

- **질문:** 연속함수는 어느 정도나 미분 불가능할까?
  - **답:** 완전히 미분 불가능할 수도 있다. (예: Weierstrass 함수, Takagi 함수)
- **본 강연의 질문:** 불연속함수는 어느 정도나 미분 가능할까?

정리 (K.). *다음을 만족하는 함수* $\Delta : [0,1] \to \mathbb{R}$*가 존재한다:*

(a) *구간* $[0,1]$*의 모든 유리수에서* Δ*는 불연속이다.*

(b) *구간* $[0,1]$*의 거의 모든 실수에서* Δ*는 미분 가능하다.*

§. 본 강연의 목표

- **질문:** 연속함수는 어느 정도나 미분 불가능할까?
  - **답:** 완전히 미분 불가능할 수도 있다. (예: Weierstrass 함수, Takagi 함수)

- **본 강연의 질문:** 불연속함수는 어느 정도나 미분 가능할까?

정리 (K.). *다음을 만족하는 함수* $\Delta : [0, 1] \to \mathbb{R}$*가 존재한다:*

(a) *구간* $[0, 1]$*의 모든 유리수에서* Δ*는 불연속이다.*

(b) *구간* $[0, 1]$*의 거의 모든 실수에서* Δ*는 미분 가능하다.* *(르벡측도 관점에서)*

§. 본 강연의 목표

- **질문:** 연속함수는 어느 정도나 미분 불가능할까?
  - **답:** 완전히 미분 불가능할 수도 있다. (예: Weierstrass 함수, Takagi 함수)

- **본 강연의 질문:** 불연속함수는 어느 정도나 미분 가능할까?

정리 (K.). *다음을 만족하는 함수* $\Delta : [0,1] \to \mathbb{R}$*가 존재한다:*

(a) *구간* $[0,1]$*의 모든 유리수에서* Δ*는 불연속이다.*

(b) *구간* $[0,1]$*의 거의 모든 실수에서* Δ*는 미분 가능하다. (르벡측도 관점에서)*

참고: 거의 모든 실수는 무리수이다.

§. 본 강연의 목표

- **질문:** 연속함수는 어느 정도나 미분 불가능할까?
  - **답:** 완전히 미분 불가능할 수도 있다. (예: Weierstrass 함수, Takagi 함수)

- **본 강연의 질문:** 불연속함수는 어느 정도나 미분 가능할까?

정리 (K.). *다음을 만족하는 함수* $\Delta : [0,1] \to \mathbb{R}$*가 존재한다:*

(a) *구간* $[0,1]$*의 모든 유리수에서* Δ*는 불연속이다.*

(b) *구간* $[0,1]$*의 거의 모든 실수에서* Δ*는 미분 가능하다.* *(르벡측도 관점에서)*

참고: 거의 모든 실수는 무리수이다. ($\because$ 유리수 집합은 셀 수 있는 집합이다)

§. 함수 Δ의 정의

- 실수 t에 대해 $\lfloor t \rfloor$를 t를 넘지 않는 최대 정수, $\lceil t \rceil$를 t보다 작지 않은 최소 정수라 하자. 즉,

$$\lfloor \pi \rfloor = \quad , \qquad \lceil \pi \rceil =$$

이다.

§. 함수 Δ의 정의

- 실수 t에 대해 $\lfloor t \rfloor$를 t를 넘지 않는 최대 정수, $\lceil t \rceil$를 t보다 작지 않은 최소 정수라 하자. 즉,

$$\lfloor \pi \rfloor = 3\,, \qquad \lceil \pi \rceil =$$

이다.

§. 함수 Δ의 정의

- 실수 t에 대해 $\lfloor t \rfloor$를 t를 넘지 않는 최대 정수, $\lceil t \rceil$를 t보다 작지 않은 최소 정수라 하자. 즉,

$$\lfloor \pi \rfloor = 3 \,, \qquad \lceil \pi \rceil = 4$$

이다.

§. 함수 Δ의 정의

- 실수 t에 대해 $\lfloor t \rfloor$를 t를 넘지 않는 최대 정수, $\lceil t \rceil$를 t보다 작지 않은 최소 정수라 하자. 즉,

$$\lfloor \pi \rfloor = 3 , \qquad \lceil \pi \rceil = 4$$

이다.

- 실수 α는 $0 \le \alpha \le 1$ 일때, 자연수 $n \ge 1$에서 정의된 함수 u_α를

$$u_\alpha(n) = \lceil \alpha n \rceil - \lceil \alpha(n-1) \rceil$$

라 정의한다.

§. 함수 Δ의 정의

- 실수 t에 대해 $\lfloor t \rfloor$를 t를 넘지 않는 최대 정수, $\lceil t \rceil$를 t보다 작지 않은 최소 정수라 하자. 즉,

$$\lfloor \pi \rfloor = 3\,, \qquad \lceil \pi \rceil = 4$$

  이다.

- 실수 α는 $0 \le \alpha \le 1$ 일때, 자연수 $n \ge 1$에서 정의된 함수 u_α를

$$u_\alpha(n) = \lceil \alpha n \rceil - \lceil \alpha(n-1) \rceil$$

  라 정의한다.

  - $0 \le \alpha \le 1$이므로 $u_\alpha(n)$은 0 이거나 1 이다.

§. 함수 Δ의 정의

보조정리. 수열 $\{a_n\}$은 0과 1로 이뤄지고, 1이 무한히 많이 있다면, 방정식

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k} = 1$$

은 구간 $(1, \infty)$에서 유일한 해를 갖는다.

보조정리. *수열 $\{a_n\}$은 0과 1로 이뤄지고, 1이 무한히 많이 있다면, 방정식*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k} = 1$$

은 구간 $(1, \infty)$에서 유일한 해를 갖는다.

증명. 구간 $(1, \infty)$에서 함수 $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}$는 $f'(x) < 0$ 이고,

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

이다. 중간값정리에 의해 주어진 방정식은 구간 $(1, \infty)$에서 유일한 해 $x = \beta > 1$를 갖는다. □

§. 함수 Δ의 정의

정의. 실수 $0 < \alpha \le 1$와 $u_\alpha(n) = \lceil \alpha n \rceil - \lceil \alpha(n-1) \rceil$에 대해, 방정식

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_\alpha(k)}{x^k} = 1$$

의 구간 $(1, \infty)$에서의 유일한 해 $x = \beta > 1$를 $\Delta(\alpha) := \beta$라 정의한다.

질문: 왜 위와 같이 정의되는 함수 Δ를 생각하게 되었을까?

§. 함수 Δ의 정의

정의. 실수 $0 < \alpha \le 1$와 $u_\alpha(n) = \lceil \alpha n \rceil - \lceil \alpha(n-1) \rceil$에 대해, 방정식

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_\alpha(k)}{x^k} = 1$$

의 구간 $(1, \infty)$에서의 유일한 해 $x = \beta > 1$를 $\Delta(\alpha) := \beta$라 정의한다.

질문: 왜 위와 같이 정의되는 함수 Δ를 생각하게 되었을까?

§. 함수 Δ의 연속성

정리 (K.). 앞에서 정의된 함수 $\Delta : [0,1] \to \mathbb{R}$는 다음의 성질을 만족한다.

(a) 임의의 유리수 $\alpha \in [0,1]$에 대해 함수 $\Delta(x)$는 점 $x = \alpha$에서 좌연속이지만 우불연속이고, 함수값 $\Delta(\alpha)$는 대수적 수이다.

(b) 임의의 무리수 $\alpha \in [0,1]$에 대해 함수 $\Delta(x)$는 점 $x = \alpha$에서 연속이고, 함수값 $\Delta(\alpha)$는 초월수이다.

§. 함수 Δ의 연속성

정리 (K.). 앞에서 정의된 함수 $\Delta : [0,1] \to \mathbb{R}$는 다음의 성질을 만족한다.

(a) 임의의 유리수 $\alpha \in [0,1]$에 대해 함수 $\Delta(x)$는 점 $x = \alpha$에서 좌연속이지만 우불연속이고, 함수값 $\Delta(\alpha)$는 대수적 수이다.

(b) 임의의 무리수 $\alpha \in [0,1]$에 대해 함수 $\Delta(x)$는 점 $x = \alpha$에서 연속이고, 함수값 $\Delta(\alpha)$는 초월수이다.

대수적 수: 정수계수 다항식의 근이 되는 수. (예: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2011} + \sqrt[3]{1228}$)

초월수: 대수적 수가 아닌 수. (예: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$, π, e, $\ln 2$, $\sin 1$, $2^{\sqrt{2}}$)

§. 함수 Δ의 연속성

정리 (K.). *앞에서 정의된 함수* $\Delta : [0,1] \to \mathbb{R}$*는 다음의 성질을 만족한다.*

(a) *임의의 유리수* $\alpha \in [0,1]$*에 대해 함수* $\Delta(x)$*는 점* $x = \alpha$*에서 좌연속이지만 우불연속이고, 함수값* $\Delta(\alpha)$*는 대수적 수이다.*

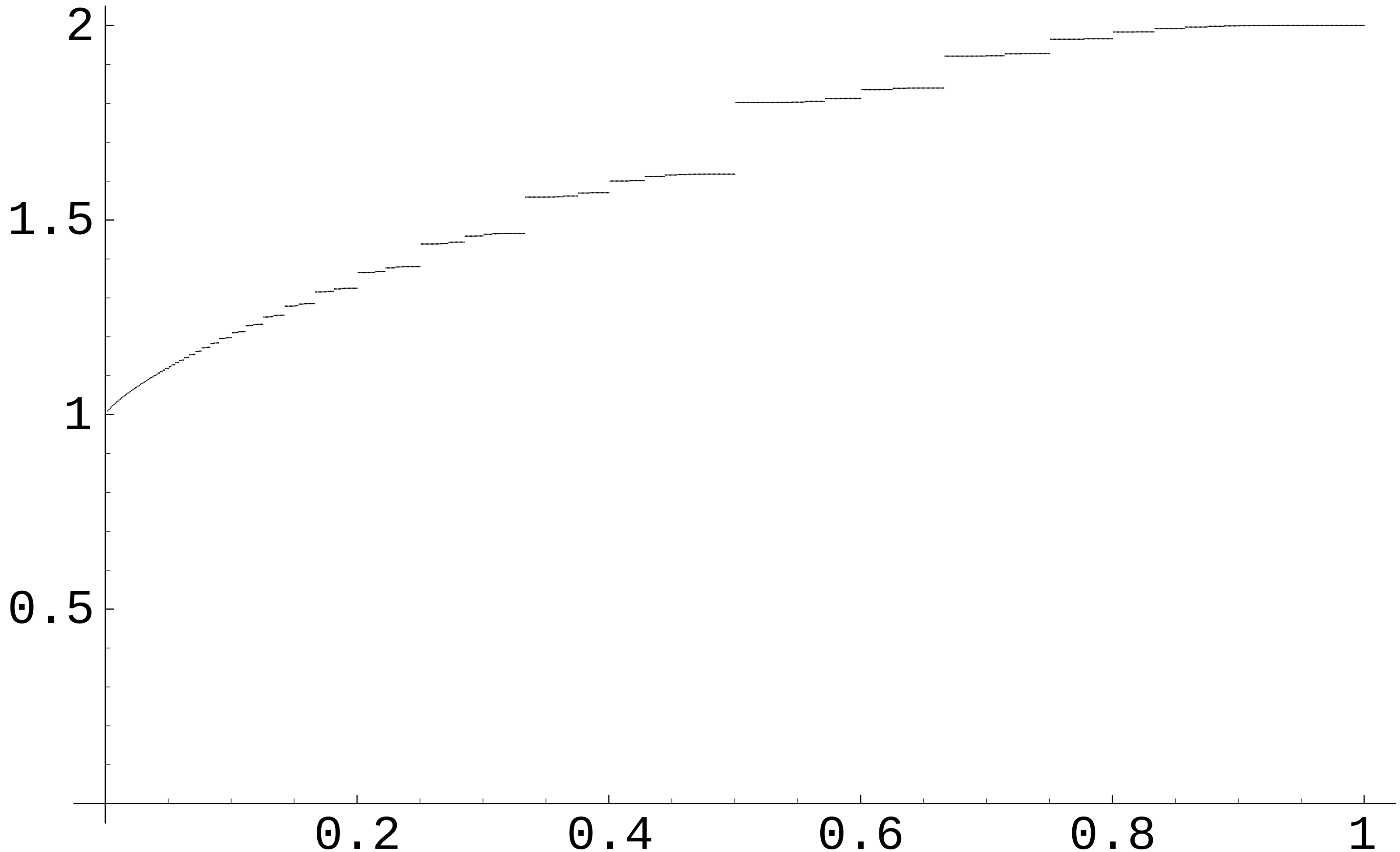
(b) *임의의 무리수* $\alpha \in [0,1]$*에 대해 함수* $\Delta(x)$*는 점* $x = \alpha$*에서 연속이고, 함수값* $\Delta(\alpha)$*는 초월수이다.*

대수적 수: 정수계수 다항식의 근이 되는 수. (예: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{2011} + \sqrt[3]{1228}$)

초월수: 대수적 수가 아닌 수. (예: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$, π, e, $\ln 2$, $\sin 1$, $2^{\sqrt{2}}$)

정리 (Cantor, 1878). *(르벡측도 관점에서) 거의 모든 실수는 초월수이다.*

§. 함수 Δ의 그래프



§. 인용

- “Differentiate!”
- “A mystery is the role of differentiation.”

–Shiing-Shen Chern (陳省身, 1911 $\sim$ 2004)

§. 함수 Δ의 미분

정의. 무리수 $\alpha \in \mathbb{R}$에 대하여 $\theta(\alpha)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\theta(\alpha) := \sup\left\{\lambda : \ \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\lambda^q}\text{가 무한히 많은 유리수해 } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q > 0\text{를 갖는다}\right\}$$

정의. 무리수 $\alpha \in \mathbb{R}$에 대하여 $\theta(\alpha)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\theta(\alpha) := \sup\left\{\lambda : \ \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\lambda^q}\text{가 무한히 많은 유리수해 } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q > 0\text{를 갖는다}\right\}$$

$$= \sup\{\lambda : \liminf_{q\to\infty} \lambda^q \|q\alpha\| = 0\}$$

§. 함수 Δ의 미분

정의. 무리수 $\alpha \in \mathbb{R}$에 대하여 $\theta(\alpha)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\theta(\alpha) := \sup\left\{\lambda : \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\lambda^q} \text{가 무한히 많은 유리수해 } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q > 0 \text{를 갖는다}\right\}$$

$$= \sup\{\lambda : \liminf_{q\to\infty} \lambda^q \|q\alpha\| = 0\}$$

보조정리. *(르벡측도 관점에서) 거의 모든 실수* α*에 대하여* $\theta(\alpha) = 1$*이다.*

§. 함수 Δ의 미분

정리 (K.). $\alpha \in [0,1]$를 무리수라 하자.

(a) $\theta(\alpha) < \Delta(\alpha)$이면, $\Delta(x)$는 $x = \alpha$에서 미분 가능하고 $\Delta'(\alpha) = 0$이다.

(b) $\theta(\alpha) > \Delta(\alpha)$이면, $\Delta(x)$는 $x = \alpha$에서 미분 가능하지 않다.

§. 함수 Δ의 미분

정리 (K.). $\alpha \in [0,1]$를 무리수라 하자.

(a) $\theta(\alpha) < \Delta(\alpha)$이면, $\Delta(x)$는 $x = \alpha$에서 미분 가능하고 $\Delta'(\alpha) = 0$이다.

(b) $\theta(\alpha) > \Delta(\alpha)$이면, $\Delta(x)$는 $x = \alpha$에서 미분 가능하지 않다.

거의 모든 실수 α에 대하여 $\theta(\alpha) = 1$이고,

$\Delta(\alpha)$는 정의에 의해 항상 $\Delta(\alpha) > 1$이므로,

거의 모든 실수 α에 대하여 $\Delta'(\alpha) = 0$이다.

§. 함수 Δ의 미분

정리 (K.). $\alpha \in [0,1]$를 *무리수라 하자.*

(a) $\theta(\alpha) < \Delta(\alpha)$ *이면,* $\Delta(x)$*는* $x = \alpha$*에서 미분 가능하고* $\Delta'(\alpha) = 0$ *이다.*

(b) $\theta(\alpha) > \Delta(\alpha)$ *이면,* $\Delta(x)$*는* $x = \alpha$*에서 미분 가능하지 않다.*

거의 모든 실수 α에 대하여 $\theta(\alpha) = 1$이고,

$\Delta(\alpha)$는 정의에 의해 항상 $\Delta(\alpha) > 1$이므로,

거의 모든 실수 α에 대하여 $\Delta'(\alpha) = 0$이다.

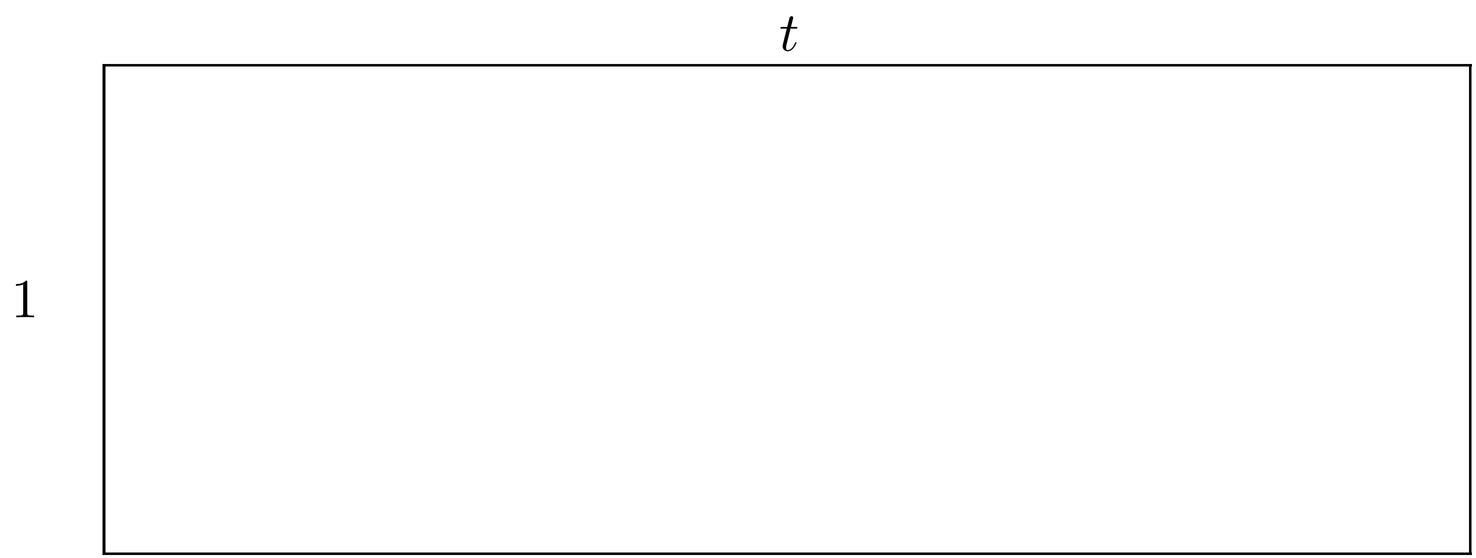
질문: $\Delta(x)$가 미분 가능하지 않은 무리수 $x = \alpha$가 존재할까?

§. 연분수 (Continued Fraction)

정의. 양수 $t > 0$의 연분수 전개는 다음과 같이 얻어진 수열 $\{a_n\}_{n\geq 0}$이다. 여기서 a_n은 $a_0 \geq 0, a_n \geq 1\ (n \geq 1)$인 정수이다.

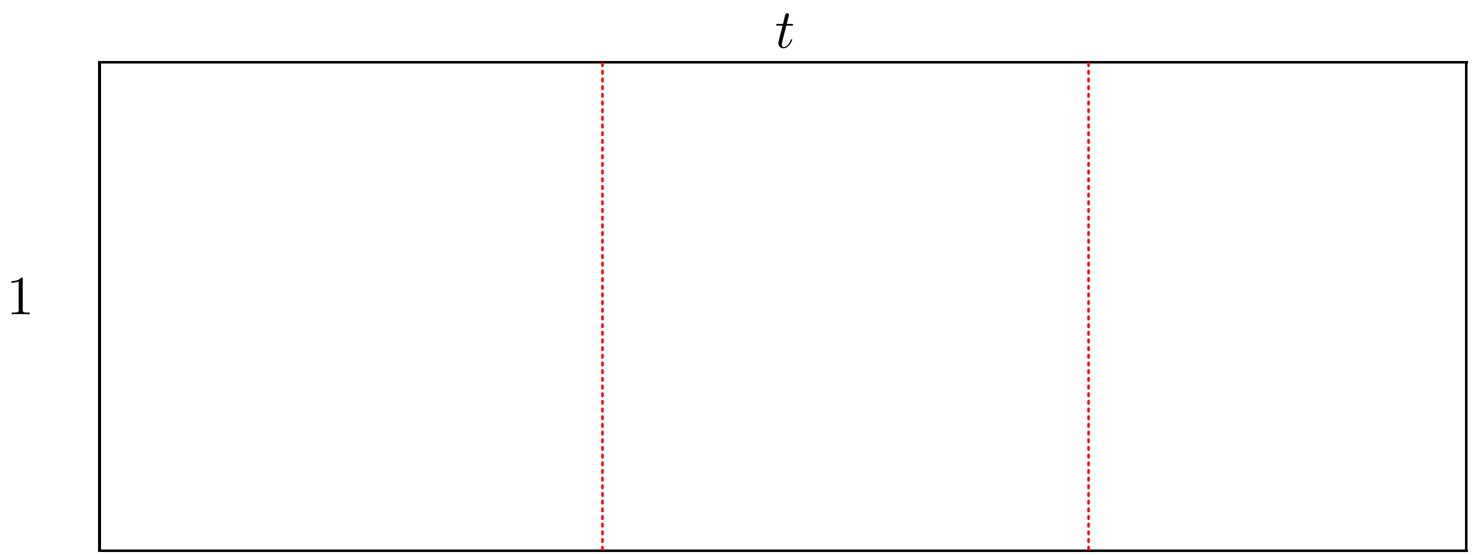
§. 연분수 (Continued Fraction)

정의. 양수 $t > 0$의 연분수 전개는 다음과 같이 얻어진 수열 $\{a_n\}_{n\geq 0}$이다. 여기서 a_n은 $a_0 \geq 0$, $a_n \geq 1$ $(n \geq 1)$인 정수이다.



§. 연분수 (Continued Fraction)

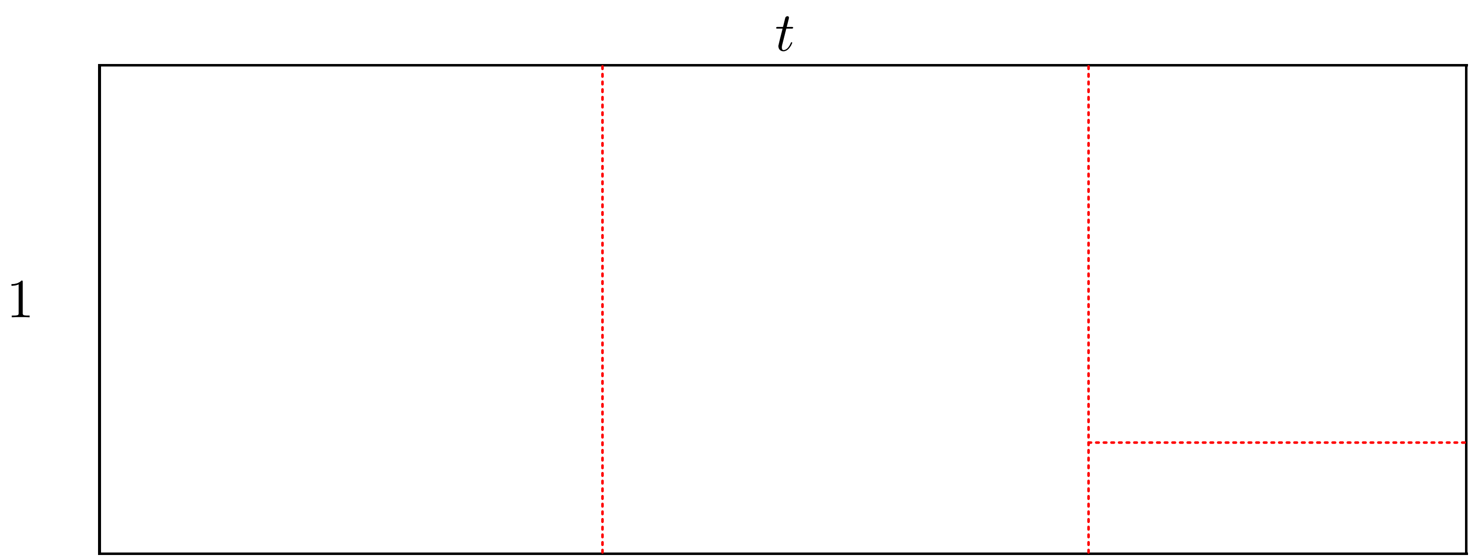
정의. 양수 $t > 0$의 연분수 전개는 다음과 같이 얻어진 수열 $\{a_n\}_{n\geq 0}$이다. 여기서 a_n은 $a_0 \geq 0$, $a_n \geq 1$ $(n \geq 1)$인 정수이다.



$a_0 = 2$

§. 연분수 (Continued Fraction)

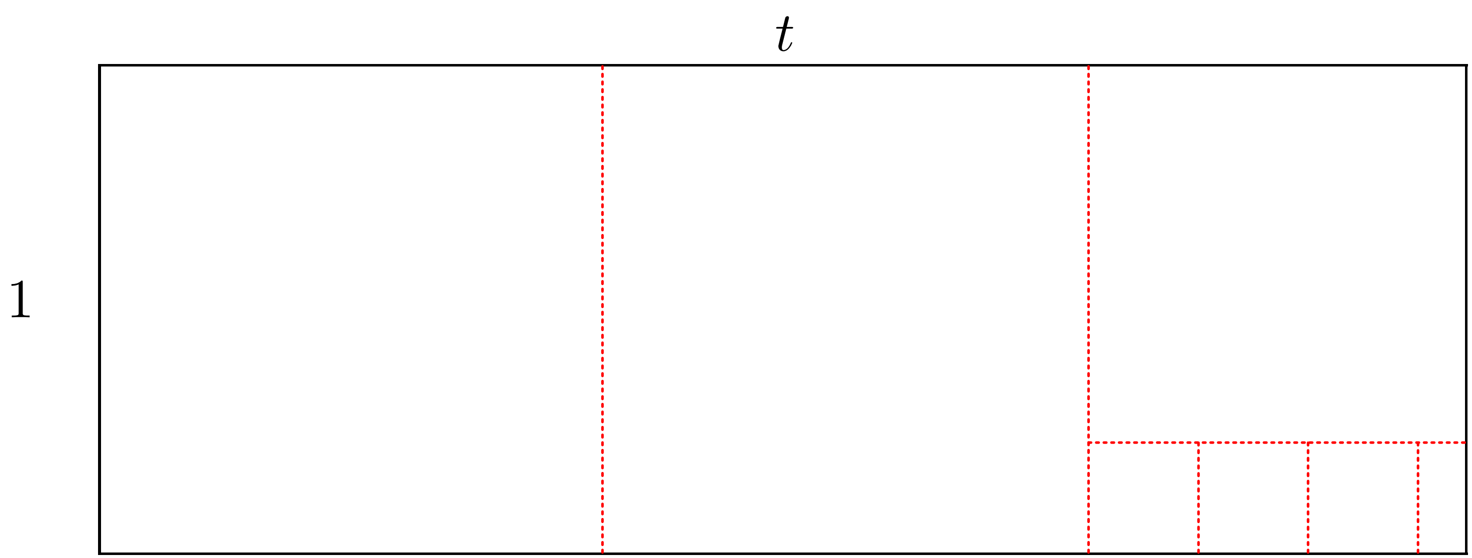
정의. 양수 $t > 0$의 연분수 전개는 다음과 같이 얻어진 수열 $\{a_n\}_{n\geq 0}$이다. 여기서 a_n은 $a_0 \geq 0$, $a_n \geq 1$ $(n \geq 1)$인 정수이다.



$a_0 = 2, \quad a_1 = 1$

§. 연분수 (Continued Fraction)

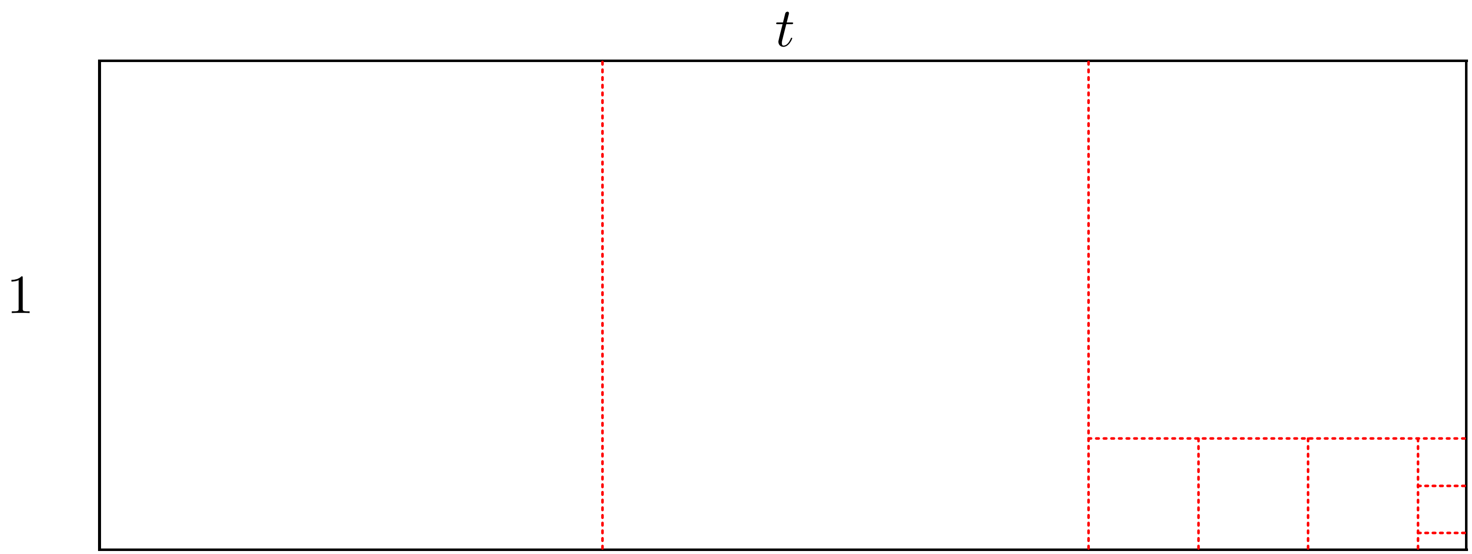
정의. 양수 $t > 0$의 연분수 전개는 다음과 같이 얻어진 수열 $\{a_n\}_{n\geq 0}$이다. 여기서 a_n은 $a_0 \geq 0$, $a_n \geq 1$ $(n \geq 1)$인 정수이다.



$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3$

§. 연분수 (Continued Fraction)

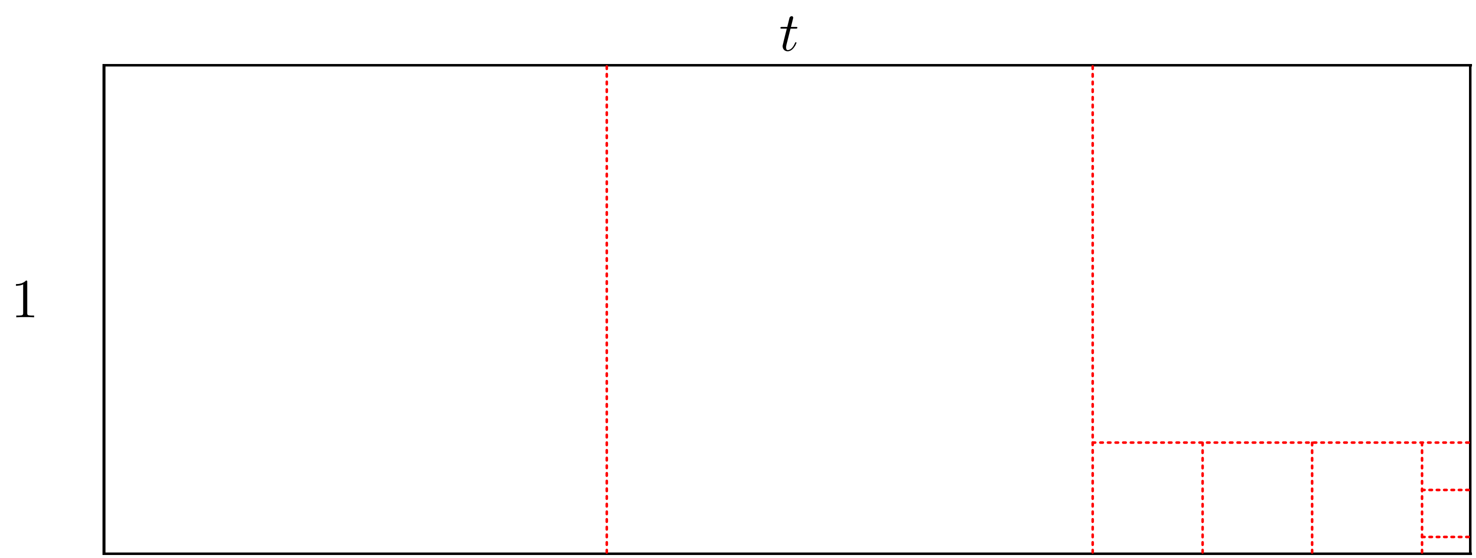
정의. 양수 $t > 0$의 연분수 전개는 다음과 같이 얻어진 수열 $\{a_n\}_{n \geq 0}$이다. 여기서 a_n은 $a_0 \geq 0$, $a_n \geq 1$ $(n \geq 1)$인 정수이다.



$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 2, \ldots$$

§. 연분수 (Continued Fraction)

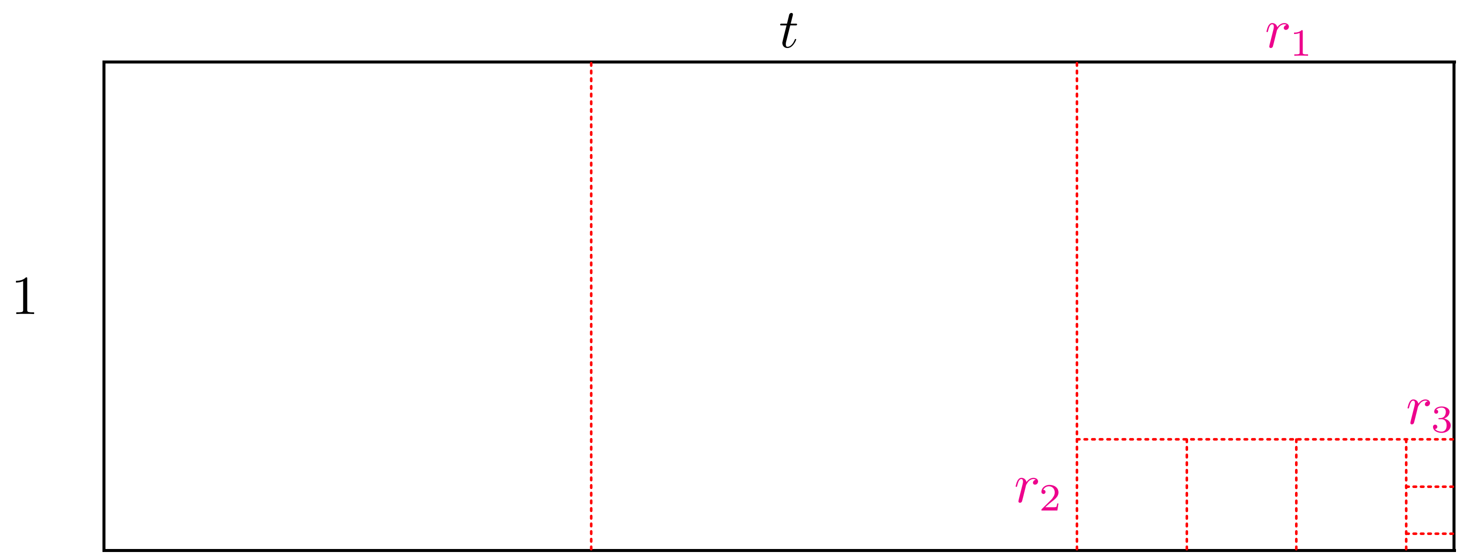
정의. 양수 $t > 0$의 연분수 전개는 다음과 같이 얻어진 수열 $\{a_n\}_{n\geq 0}$이다. 여기서 a_n은 $a_0 \geq 0$, $a_n \geq 1$ $(n \geq 1)$인 정수이다.



$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 2, \ldots$

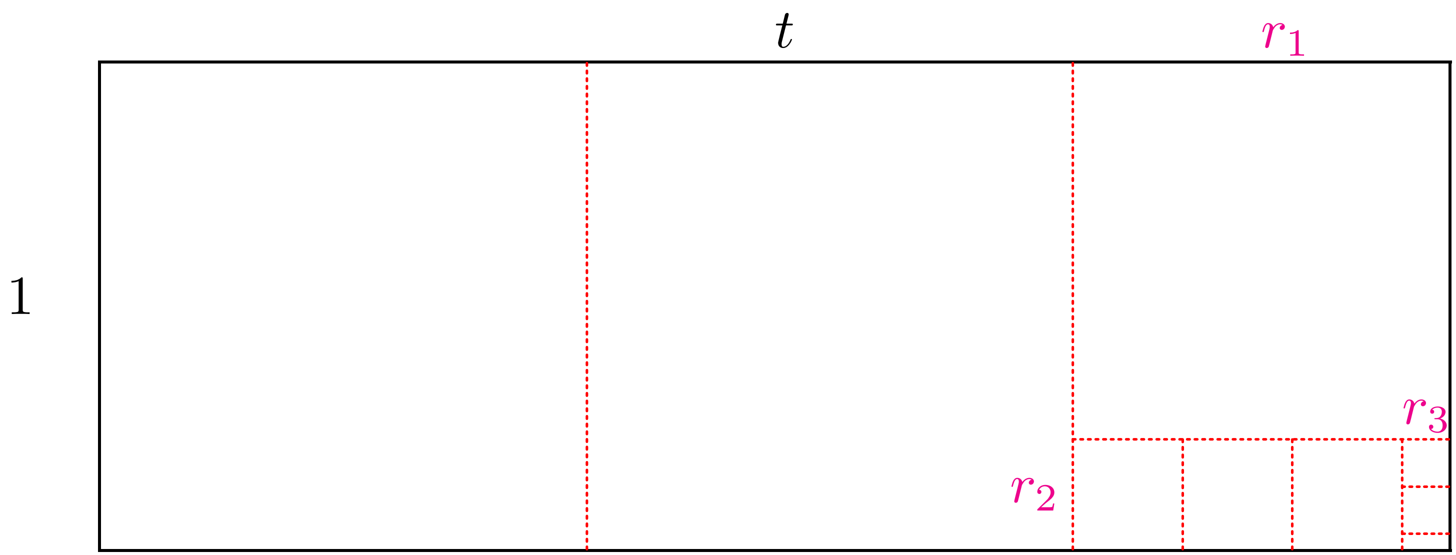
$\Rightarrow 0 < t < 1$이면 $a_0 = 0$이다.

§. 연분수 (Continued Fraction)



$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 2, \ldots$$

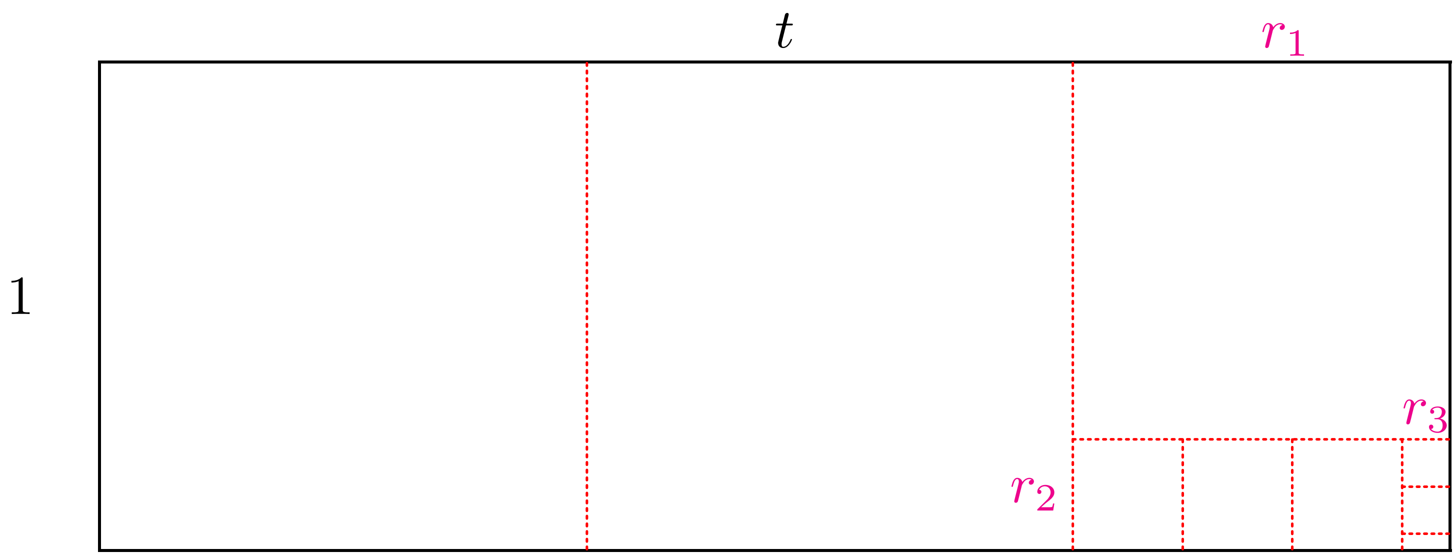
§. 연분수 (Continued Fraction)



$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 2, \ldots$

$$t = a_0 + r_1 \qquad\qquad (r_1 < 1)$$

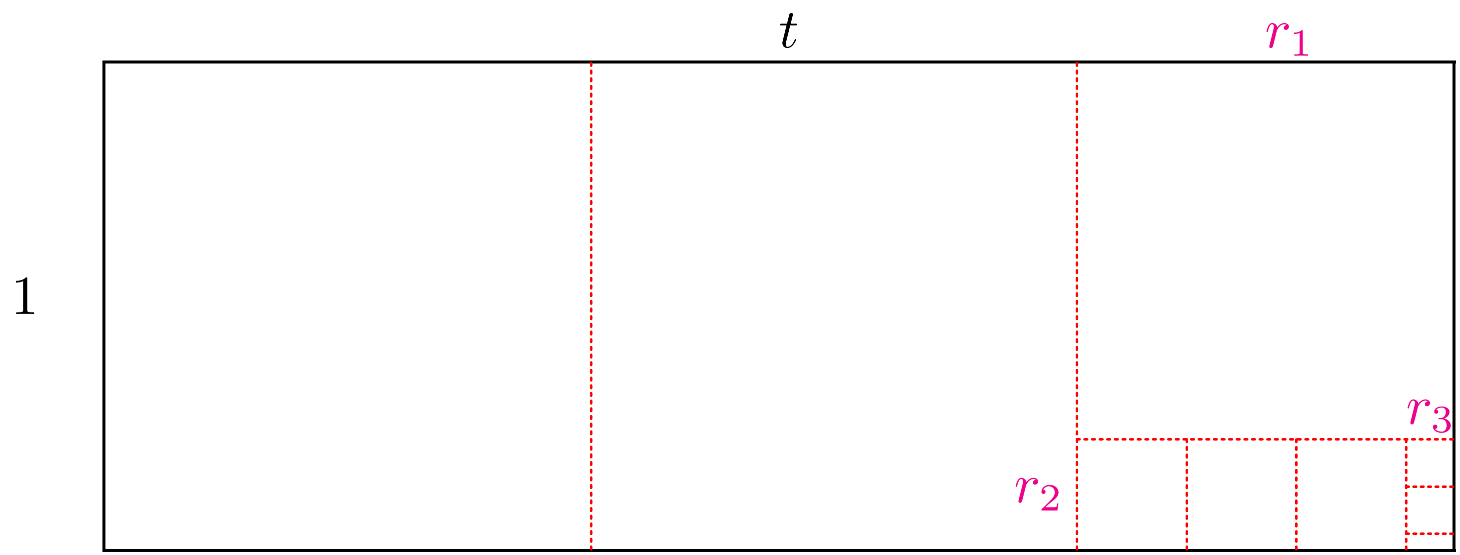
§. 연분수 (Continued Fraction)



$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 2, \ldots$$

$$t = a_0 + r_1 = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{r_1}} \qquad (r_1 < 1)$$

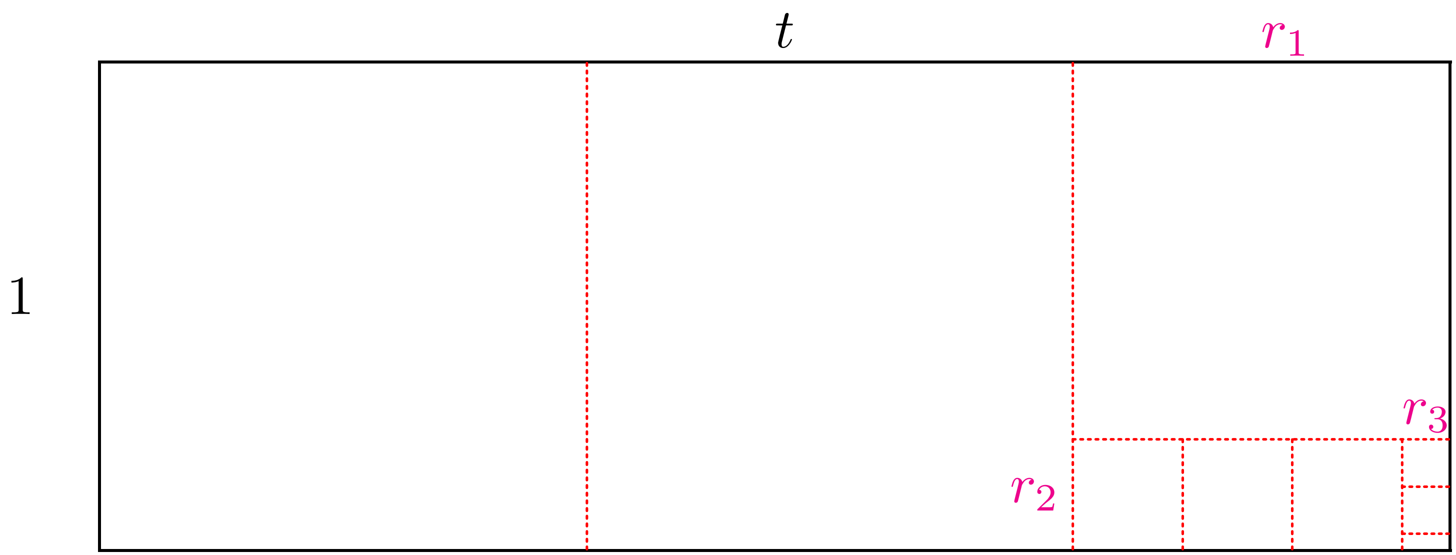
§. 연분수 (Continued Fraction)



$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 2, \ldots$$

$$t = a_0 + r_1 = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_2}{r_1}} \qquad (r_2 < r_1)$$

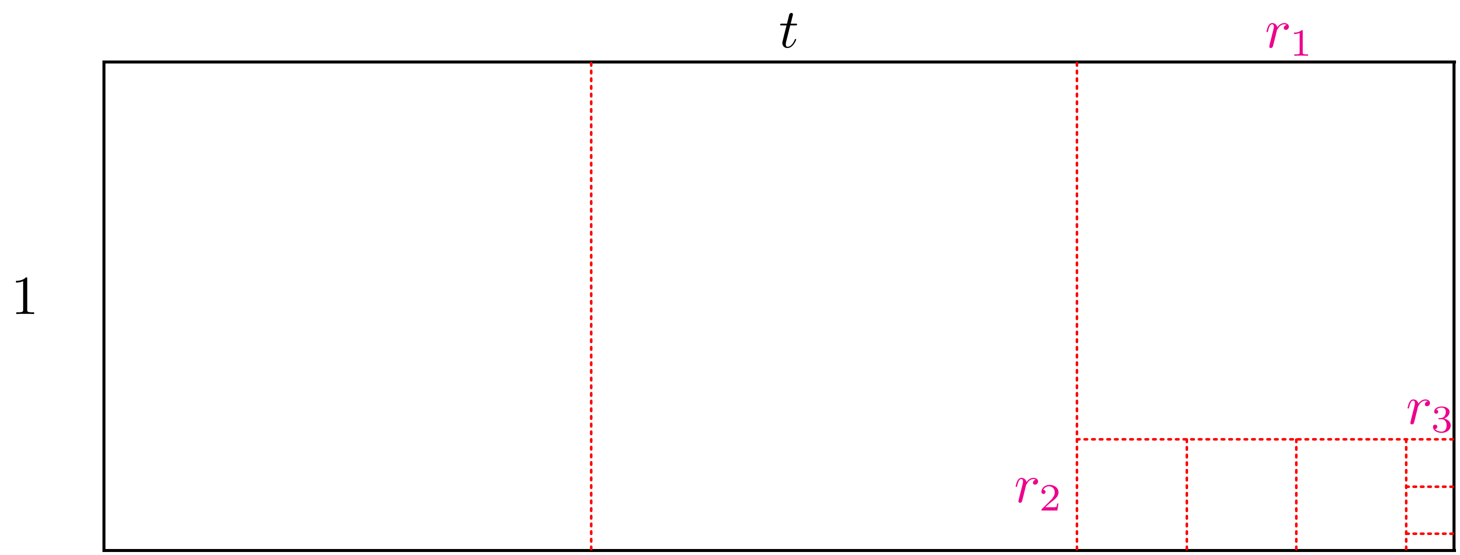
§. 연분수 (Continued Fraction)



$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 2, \ldots$$

$$t = a_0 + r_1 = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_2}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} \quad (r_2 < r_1)$$

§. 연분수 (Continued Fraction)

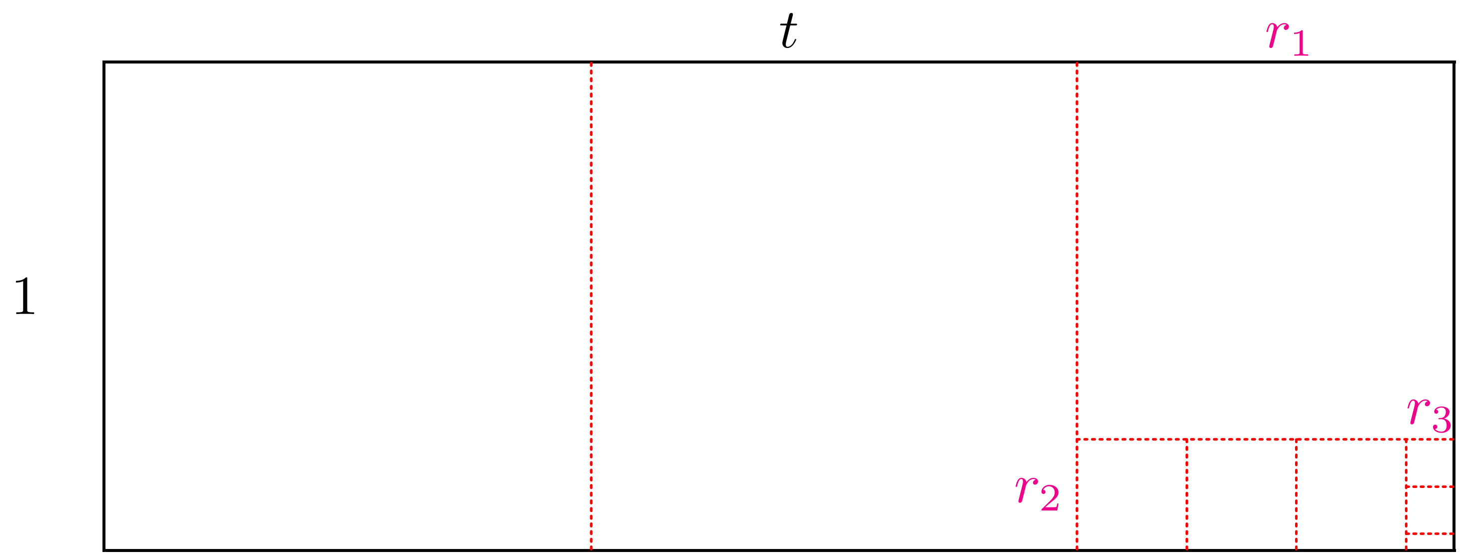


$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 2, \ldots$$

$$t = a_0 + r_1 = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{r_2}{r_1}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}$$

$$= a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{r_3}{r_2}}} \qquad (r_3 < r_2)$$

§. 연분수 (Continued Fraction)



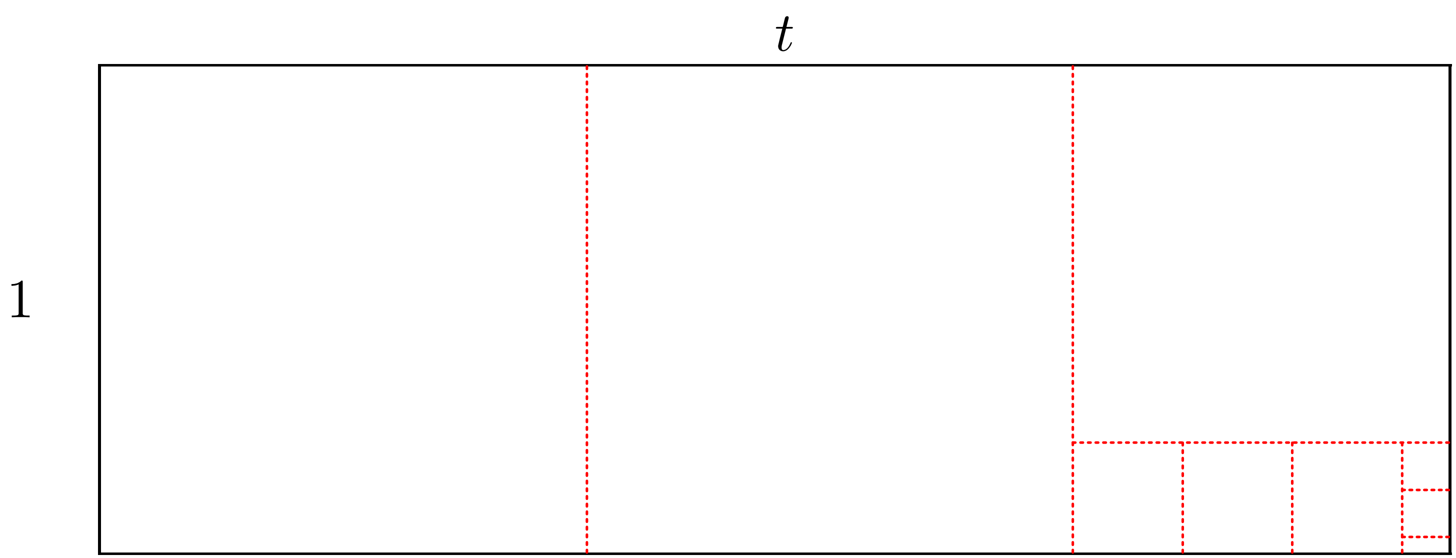
$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 2, \ldots$$

$$t = a_0 + r_1 = a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{r_1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{r_2}{r_1}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}}$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{r_3}{r_2}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}}}} = \cdots \qquad (r_3 < r_2)$$

§. 연분수 (Continued Fraction)

정의. 양수 $t > 0$의 연분수 전개는 다음과 같이 얻어진 수열 $\{a_n\}_{n \geq 0}$이다. 여기서 a_n은 $a_0 \geq 0$, $a_n \geq 1$ $(n \geq 1)$인 정수이다.



$a_0 = 2, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_3 = 2, \ldots$

§. 연분수 (Continued Fraction)

정의. 양수 $t > 0$의 연분수 전개는 다음과 같이 얻어진 수열 $\{a_n\}_{n\geq 0}$ 이다. 여기서 a_n은 $a_0 \geq 0, a_n \geq 1\ (n \geq 1)$인 정수이다.

이때, $t = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} =: [a_0; a_1, a_2, \ldots]$로 쓴다.

§. 연분수 (Continued Fraction)

정의. 양수 $t>0$의 연분수 전개는 다음과 같이 얻어진 수열 $\{a_n\}_{n\geq 0}$이다. 여기서 a_n은 $a_0 \geq 0$, $a_n \geq 1\ (n \geq 1)$인 정수이다.

이때, $t = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} =: [a_0; a_1, a_2, \ldots]$로 쓴다.

$t>0$의 연분수 전개 $\{a_n\}_{n\geq 0}$에 대하여, 기약분수 $\frac{p_n}{q_n}$을

$$\frac{p_n}{q_n} := [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

로 정의하고, t의 n번째 수렴(convergent)이라 한다.

§. 유리수의 연분수

보기. $t = \frac{p}{q} = \frac{17}{5}$의 연분수 전개.

§. 유리수의 연분수

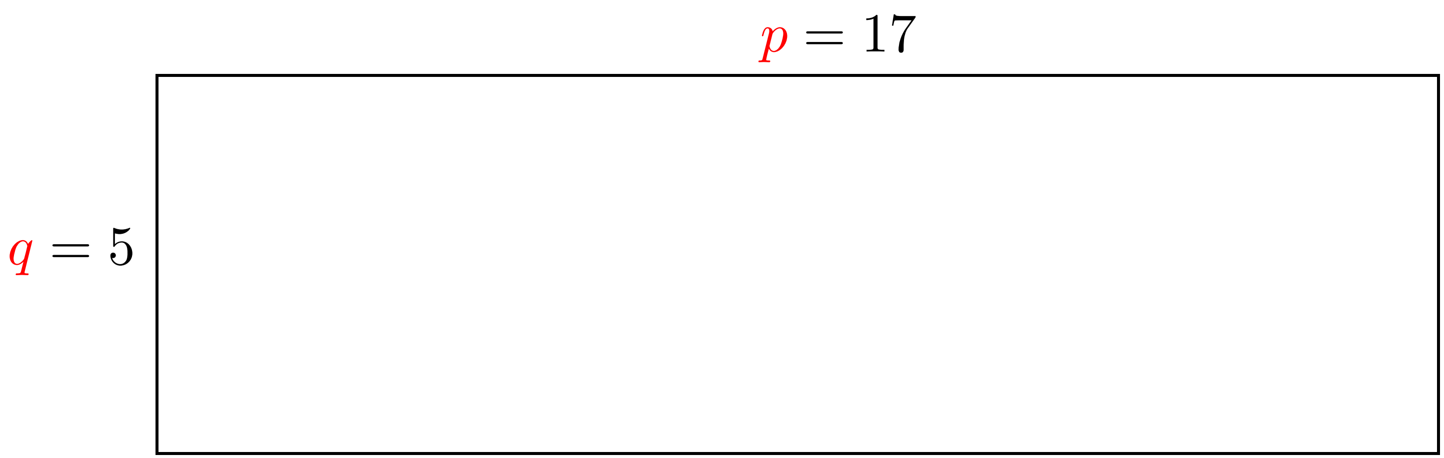
보기. $t = \frac{p}{q} = \frac{17}{5}$의 연분수 전개.

$$t = \frac{p}{q} = \frac{17}{5}$$

1

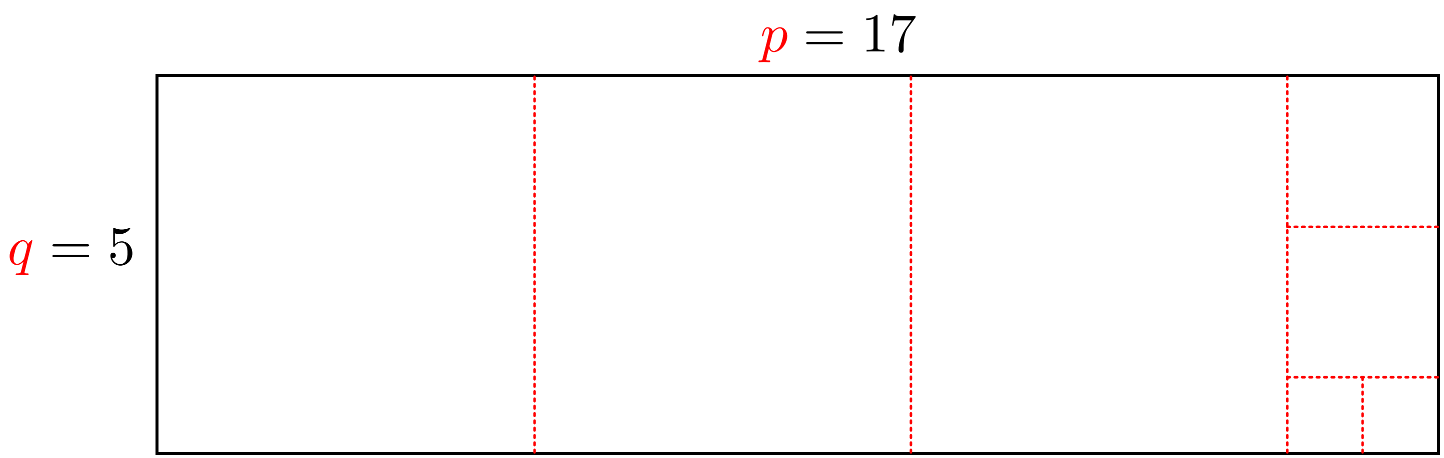
§. 유리수의 연분수

보기. $t = \frac{p}{q} = \frac{17}{5}$의 연분수 전개.



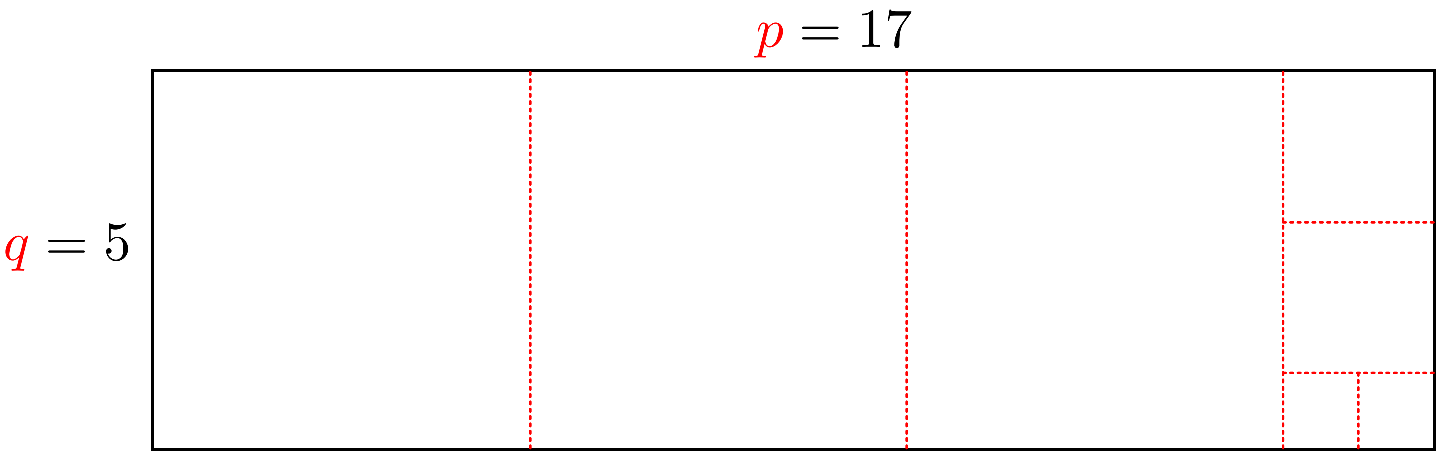
§. 유리수의 연분수

보기. $t = \frac{p}{q} = \frac{17}{5}$의 연분수 전개.



§. 유리수의 연분수

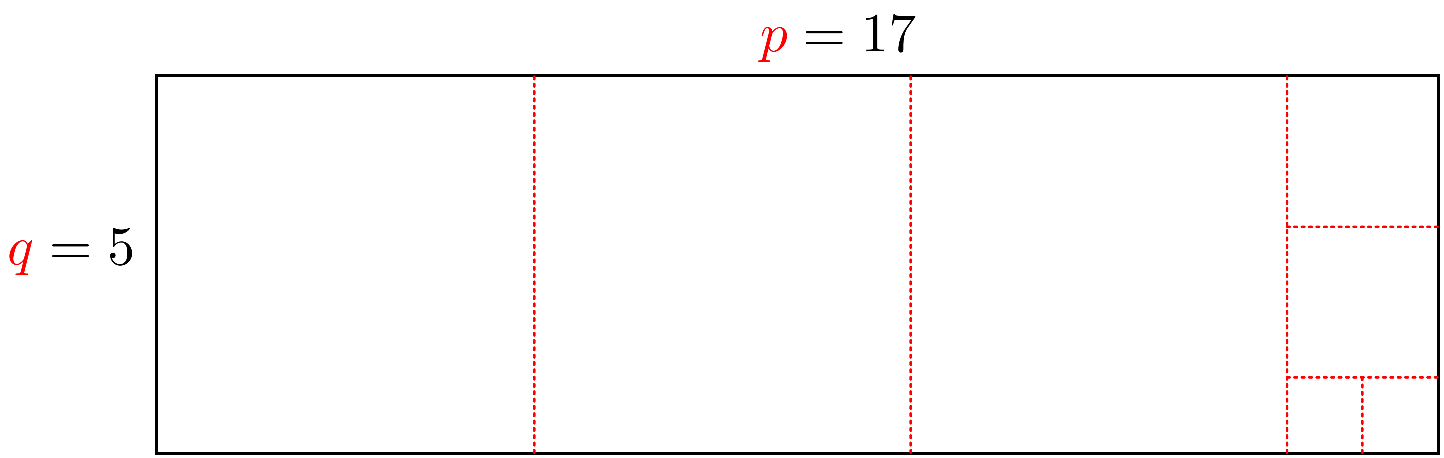
보기. $t = \frac{p}{q} = \frac{17}{5}$의 연분수 전개.



$a_0 = 3, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 2.$ 끝! $\Longrightarrow \therefore \ \frac{17}{5} = [3; 2, 2] = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$

§. 유리수의 연분수

보기. $t = \frac{p}{q} = \frac{17}{5}$의 연분수 전개.



$a_0 = 3, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 2.$ 끝! $\Longrightarrow \therefore\ \frac{17}{5} = [3; 2, 2] = 3 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$

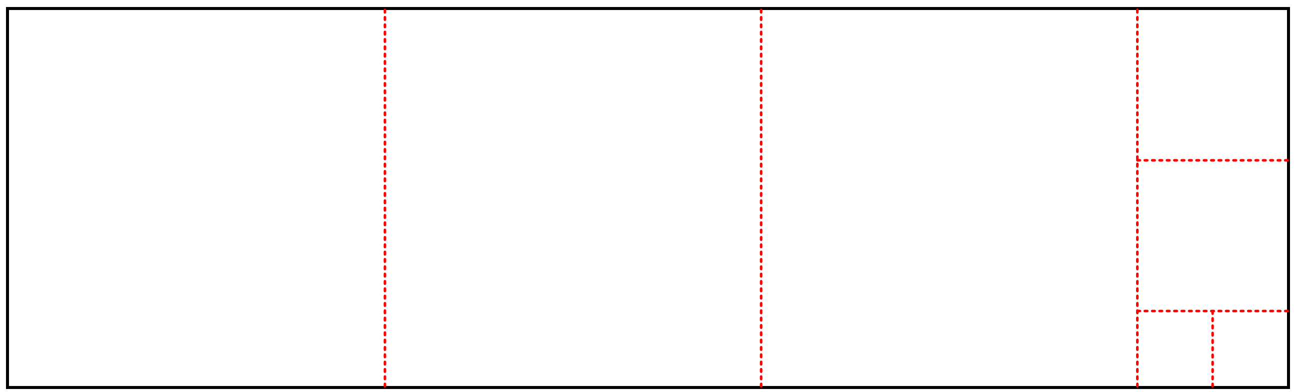
문제: 위의 $\frac{p}{q}$의 연분수 전개 $\{a_n\}_{n\geq 0}$을 구하는 과정은
두 정수 p, q의 __________를 구하는 ______________의 과정과 같다.

§. 유리수의 연분수

보기. $t = \frac{p}{q} = \frac{17}{5}$의 연분수 전개.

$p = 17$

$q = 5$



$a_0 = 3, \quad a_1 = 2, \quad a_2 = 2.$ 끝! $\Longrightarrow \therefore\ \frac{17}{5} = [3; 2, 2] = 3 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}$

문제: 위의 $\frac{p}{q}$의 연분수 전개 $\{a_n\}_{n\geq 0}$을 구하는 과정은
두 정수 p, q의 최대공약수를 구하는 유클리드 호제법의 과정과 같다.

§. 유리수의 연분수

두 정수 사이의 유클리드 호제법은 반드시 유한번 안에 끝나므로 다음을 얻는다.

정리. *실수 $t > 0$의 연분수 전개 $\{a_n\}_{n\geq 0}$이 유한 수열일 필요충분조건은 t가 유리수이다.*

§. 유리수의 연분수

두 정수 사이의 유클리드 호제법은 반드시 유한번 안에 끝나므로 다음을 얻는다.

정리. *실수 $t > 0$의 연분수 전개 $\{a_n\}_{n\geq 0}$이 유한 수열일 필요충분조건은 t가 유리수이다.*

Proof. ($\Leftarrow$) 유클리드 호제법.

($\Rightarrow$) 1과 t가 통약성(commensurability)을 가지므로.

□

§. 무리수의 연분수 – 대수적 수

보기. $t = \sqrt{5}$의 연분수 전개.

§. 무리수의 연분수 – 대수적 수

보기. $t = \sqrt{5}$의 연분수 전개.

$\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} - 2$

§. 무리수의 연분수 – 대수적 수

보기. $t = \sqrt{5}$의 연분수 전개.

$$\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} - 2 = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}$$

보기. $t = \sqrt{5}$의 연분수 전개.

$$\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} - 2 = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}+2}$$

§. 무리수의 연분수 – 대수적 수

보기. $t = \sqrt{5}$의 연분수 전개.

$$\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} - 2 = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}+2} = 2 + \frac{1}{4 + \sqrt{5} - 2}$$

§. 무리수의 연분수 – 대수적 수

보기. $t = \sqrt{5}$의 연분수 전개.

$$\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} - 2 = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}+2} = 2 + \frac{1}{4 + \sqrt{5} - 2} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}}$$

§. 무리수의 연분수 – 대수적 수

보기. $t = \sqrt{5}$의 연분수 전개.

$$\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} - 2 = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}+2} = 2 + \frac{1}{4 + \sqrt{5} - 2} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\sqrt{5}+2}}$$

§. 무리수의 연분수 – 대수적 수

보기. $t=\sqrt{5}$의 연분수 전개.

$$\sqrt{5}=2+\sqrt{5}-2=2+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}=2+\frac{1}{\sqrt{5}+2}=2+\frac{1}{4+\sqrt{5}-2}=2+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}}$$

$$=2+\frac{1}{4+\frac{1}{\sqrt{5}+2}}=2+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\sqrt{5}-2}}$$

§. 무리수의 연분수 – 대수적 수

보기. $t = \sqrt{5}$의 연분수 전개.

$$\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} - 2 = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}+2} = 2 + \frac{1}{4+\sqrt{5}-2} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{\sqrt{5}+2}} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\sqrt{5}-2}} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}}} = \cdots$$

§. 무리수의 연분수 – 대수적 수

보기. $t = \sqrt{5}$의 연분수 전개.

$$\sqrt{5} = 2 + \sqrt{5} - 2 = 2 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{5}+2} = 2 + \frac{1}{4+\sqrt{5}-2} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}}$$

$$= 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{\sqrt{5}+2}} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\sqrt{5}-2}} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}}} = \cdots$$

$$= [2; 4, 4, 4, \ldots]$$

§. 무리수의 연분수 – 대수적 수

보기. $t=\sqrt{5}$의 연분수 전개.

$$\sqrt{5}=2+\sqrt{5}-2=2+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}=2+\frac{1}{\sqrt{5}+2}=2+\frac{1}{4+\sqrt{5}-2}=2+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}}$$
$$=2+\frac{1}{4+\frac{1}{\sqrt{5}+2}}=2+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\sqrt{5}-2}}=2+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}-2}}}}=\cdots$$
$$=[2;4,4,4,\ldots]$$

$\Longrightarrow \quad t=\sqrt{5}$의 연분수 전개는 순환한다.

§. 무리수의 연분수 – 대수적 수

보기. t의 연분수 전개가 $t = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$와 같이 순환할 때, 실수 t의 값을 구하라.

§. 무리수의 연분수 – 대수적 수

보기. t의 연분수 전개가 $t = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots]$와 같이 순환할 때, 실수 t의 값을 구하라.

$$t - 1 = [0; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots] \Longrightarrow \frac{1}{t-1} = [1; 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots]$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{t-1} - 1 = \frac{2-t}{t-1} = [0; 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots]$$

$$\Longrightarrow \frac{t-1}{2-t} = [2; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \ldots].$$

따라서, $\frac{t-1}{2-t} - 1 = t$ 이고 $t^2 = 3$이 되어 $t = \sqrt{3}$ 이다.

§. 무리수의 연분수 – 대수적 수

정리 (Euler, Lagrange). *t의 연분수 전개가 순환할 필요충분조건은 t가 정수계수 2차 방정식의 근이 되는 무리수이다.*

§. 무리수의 연분수 – 대수적 수

정리 (Euler, Lagrange). *t의 연분수 전개가 순환할 필요충분조건은 t가 정수계수 2차 방정식의 근이 되는 무리수이다.*

질문: $t = \sqrt[3]{2}$의 연분수 전개가 $\{a_n\}_{n\geq 0}$일 때, 수열 $\{a_n\}_{n\geq 0}$은 유계일까?

§. 무리수의 연분수 – 대수적 수

정리 (Euler, Lagrange). *t의 연분수 전개가 순환할 필요충분조건은 t가 정수계수 2차 방정식의 근이 되는 무리수이다.*

질문: $t = \sqrt[3]{2}$의 연분수 전개가 $\{a_n\}_{n\geq 0}$일 때, 수열 $\{a_n\}_{n\geq 0}$은 유계일까?

답: 현재까지 지구상에 답을 아는 사람이 없다.

§. 무리수의 연분수 – 대수적 수

정리 (Euler, Lagrange). *t의 연분수 전개가 순환할 필요충분조건은 t가 정수계수 2차 방정식의 근이 되는 무리수이다.*

질문: $t = \sqrt[3]{2}$의 연분수 전개가 $\{a_n\}_{n\geq 0}$일 때, 수열 $\{a_n\}_{n\geq 0}$은 유계일까?

답: 현재까지 지구상에 답을 아는 사람이 없다.

추측. *정수계수 2차 방정식의 근이 아닌 무리수 t가 대수적 수이면 t의 연분수 전개 $\{a_n\}_{n\geq 0}$은 유계가 아니다.*

§. 무리수의 연분수 – 초월수

정리 (Euler). *자연로그의 밑 e의 연분수 전개는*

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, 1, 1, \ldots]$$

이다.

보기. 원주율 π의 연분수 전개와 n번째 수렴 $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}_{n\geq 0}$.

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, \ldots]$$

$$\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}_{n\geq 0} = \left\{3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \frac{208341}{66317}, \ldots\right\}$$

§. 함수 Δ의 미분

정의. 무리수 $\alpha \in \mathbb{R}$에 대하여 $\theta(\alpha)$를 다음과 같이 정의한다.

$$\theta(\alpha) := \sup\left\{\lambda : \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\lambda^q} \text{가 무한히 많은 유리수해 } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q > 0\text{를 갖는다}\right\}$$

정리. *$\alpha \in [0,1]$를 무리수라 하자.*

(a) *$\theta(\alpha) < \Delta(\alpha)$이면, $\Delta(x)$는 $x = \alpha$에서 미분 가능하고 $\Delta'(\alpha) = 0$이다.*

(b) *$\theta(\alpha) > \Delta(\alpha)$이면, $\Delta(x)$는 $x = \alpha$에서 미분 가능하지 않다.*

보조정리. *(르벡측도 관점에서) 거의 모든 실수 α에 대하여 $\theta(\alpha) = 1$이다.*

§. 함수 Δ의 미분

보조정리. *무리수* $\alpha \in [0,1]$*의 연분수 전개가* $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ *이고,* $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}_{n\geq 0}$ *을* α*의* n *번째 수렴이라 하면,*

$$\theta(\alpha) = e^{\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n}}$$

이다.

§. 함수 Δ의 미분

보조정리. *무리수 $\alpha \in [0,1]$의 연분수 전개가 $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$이고, $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}_{n\geq 0}$을 α의 n번째 수렴이라 하면,*

$$\theta(\alpha) = e^{\limsup_{n\to\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n}}$$

이다.

- 위의 보조정리와 연분수 이론으로 부터 $\theta(\alpha) > 1$이기 위해서는 α의 연분수 전개 $\{a_n\}_{n\geq 0}$이 빨리 증가해야 한다.
- 수열 $\{a_n\}_{n\geq 0}$이 빨리 증가할수록 $\theta(\alpha)$의 값이 더 커진다.

§. 함수 Δ의 미분

정리. *무리수* $\alpha \in [0,1]$*가 대수적 수이면,* $\theta(\alpha) = 1$*이다. 따라서 모든 무리수이면서 대수적 수인* $\alpha \in [0,1]$*에서* $\Delta'(\alpha) = 0$*이다.*

§. 함수 Δ의 미분

정리. *무리수* $\alpha \in [0,1]$*가 대수적 수이면,* $\theta(\alpha) = 1$*이다. 따라서 모든 무리수이면서 대수적 수인* $\alpha \in [0,1]$*에서* $\Delta'(\alpha) = 0$*이다.*

보기. $\alpha = [0; 10^1, 10^2, 10^3, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$

§. 함수 Δ의 미분

정리. *무리수 $\alpha \in [0,1]$가 대수적 수이면, $\theta(\alpha) = 1$이다. 따라서 모든 무리수이면서 대수적 수인 $\alpha \in [0,1]$에서 $\Delta'(\alpha) = 0$이다.*

보기.

- $\alpha = [0; 10^1, 10^2, 10^3, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$

- $\alpha = [0; 10!, 20!, 30!, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$

  $10! \approx 3.6 \times 10^6, \quad 100! \approx 9.3 \times 10^{157}, \quad 1000! \approx 4.0 \times 10^{2567}$

  $\implies$ $100!$을 적는데 숫자(digit)가 158개 필요.

  $\implies$ $1000!$을 적는데 숫자가 2568개 필요.

§. 함수 Δ의 미분

정리. *무리수 $\alpha \in [0,1]$가 대수적 수이면, $\theta(\alpha) = 1$이다. 따라서 모든 무리수이면서 대수적 수인 $\alpha \in [0,1]$에서 $\Delta'(\alpha) = 0$이다.*

보기.

- $\alpha = [0; 10^1, 10^2, 10^3, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$

- $\alpha = [0; 10!, 20!, 30!, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$

  $10! \approx 3.6 \times 10^6, \quad 100! \approx 9.3 \times 10^{157}, \quad 1000! \approx 4.0 \times 10^{2567}$

  $\implies$ $100!$을 적는데 숫자(digit)가 158개 필요.

  $\implies$ $1000!$을 적는데 숫자가 2568개 필요.

- $\alpha = [0; 10^{10!}, 10^{20!}, 10^{30!}, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$

  $\implies$ $10^{10!}$을 적는데 숫자가 360만개 필요.

  $\implies$ $10^{100!}$을 적는데 숫자가 9.3×10^{157}개 필요.

§. 동양의 수(數)의 단위

수	1	10^1	10^2	10^3	10^4	10^8	10^{12}	10^{16}
명칭	일(一)	십(十)	백(百)	천(千)	만(萬)	억(億)	조(兆)	경(京)

§. 동양의 수(數)의 단위

수	1	10^1	10^2	10^3	10^4	10^8	10^{12}	10^{16}
명칭	일(一)	십(十)	백(百)	천(千)	만(萬)	억(億)	조(兆)	경(京)

10^{20}	10^{24}	10^{28}	10^{32}	10^{36}	10^{40}	10^{44}	10^{48}
해(垓)	자(禾+그칠자)	양(壤)	구(溝)	간(澗)	정(正)	재(載)	극(極)

§. 동양의 수(數)의 단위

수	1	10^1	10^2	10^3	10^4	10^8	10^{12}	10^{16}
명칭	일(一)	십(十)	백(百)	천(千)	만(萬)	억(億)	조(兆)	경(京)

10^{20}	10^{24}	10^{28}	10^{32}	10^{36}	10^{40}	10^{44}	10^{48}
해(垓)	자(禾+그칠자)	양(壤)	구(溝)	간(澗)	정(正)	재(載)	극(極)

10^{52}	10^{56}	10^{60}	10^{64}	10^{68}
항하사 (恒河沙)	아승기 (阿僧祇)	나유타 (那由他)	불가사의 (不可思議)	무량대수 (無量大數)

항하사 $\approx$ 갠지스강의 모래알의 개수.

§. 서양의 수(數)의 단위

수	1	10^1	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}
명칭	one	ten	hundred	thousand	million	billion	trillion

§. 서양의 수(數)의 단위

수	1	10^1	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}
명칭	one	ten	hundred	thousand	million	billion	trillion

10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{27}	10^{30}	10^{33}	10^{36}
quadrillion	quintillion	sextillion	septillion	octillion	nonillion	decillion	undecillion

10^{39}	10^{42}	10^{45}	10^{48}	10^{51}	10^{54}
duodecillion	tredecillion	quattuordecillion	quindecillion	sexdecillion	septendecillion

10^{57}	10^{60}	10^{63}
octodecillion	novemdecillion	vigintillion

10^{100}	10^{303}	10^{3003}	$10^{3000003}$	$10^{10^{100}}$
googol	centillion	millillion	milli-millillion	googolplex

§. 서양의 수(數)의 단위

수	1	10^1	10^2	10^3	10^6	10^9	10^{12}
명칭	one	ten	hundred	thousand	million	billion	trillion

10^{15}	10^{18}	10^{21}	10^{24}	10^{27}	10^{30}	10^{33}	10^{36}
quadrillion	quintillion	sextillion	septillion	octillion	nonillion	decillion	undecillion

10^{39}	10^{42}	10^{45}	10^{48}	10^{51}	10^{54}
duodecillion	tredecillion	quattuordecillion	quindecillion	sexdecillion	septendecillion

10^{57}	10^{60}	10^{63}
octodecillion	novemdecillion	vigintillion

10^{100}	10^{303}	10^{3003}	$10^{3000003}$	$10^{10^{100}}$
googol	centillion	millillion	milli-millillion	googolplex

- googol과 googolplex는 1938년 미국의 수학자 Edward Kasner의 9살짜리 조카 Milton Sirotta에 의해 만들어진 말이다.
- “googolplex는 0이 너무 많아 전 우주공간에 다 적을 수도 없다." – Carl Sagan
- $10^{100!} \approx 10^{9.3\times10^{157}} > \text{googolplex}$.

§. 함수 Δ의 미분

보기.

- $\alpha = [0; 10^1, 10^2, 10^3, \ldots] \Longrightarrow \theta(\alpha) = 1 \Longrightarrow \Delta'(\alpha) = 0.$
- $\alpha = [0; 10!, 20!, 30!, \ldots] \Longrightarrow \theta(\alpha) = 1 \Longrightarrow \Delta'(\alpha) = 0.$
- $\alpha = [0; 10^{10!}, 10^{20!}, 10^{30!}, \ldots] \Longrightarrow \theta(\alpha) = 1 \Longrightarrow \Delta'(\alpha) = 0.$

- $\alpha = [0; 10, 10^{10}, 10^{10^{10}}, 10^{10^{10^{10}}}, \ldots] \Longrightarrow$?

§. 함수 Δ의 미분

보기.

- $\alpha = [0; 10^1, 10^2, 10^3, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$
- $\alpha = [0; 10!, 20!, 30!, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$
- $\alpha = [0; 10^{10!}, 10^{20!}, 10^{30!}, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$

- $\alpha = [0; 10, 10^{10}, 10^{10^{10}}, 10^{10^{10^{10}}}, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$

§. 함수 Δ의 미분

보기.

- $\alpha = [0; 10^1, 10^2, 10^3, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$
- $\alpha = [0; 10!, 20!, 30!, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$
- $\alpha = [0; 10^{10!}, 10^{20!}, 10^{30!}, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$
- $\alpha = [0; 10, 10^{10}, 10^{10^{10}}, 10^{10^{10^{10}}}, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$
- $\alpha = [0; 10, 10!, (10!)!, ((10!)!)!, \ldots] \implies$?

  $10! = 3628800, \quad (10!)! = 3628800! \approx 9.052 \times 10^{22228103}$

§. 함수 Δ의 미분

보기.

- $\alpha = [0; 10^1, 10^2, 10^3, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$
- $\alpha = [0; 10!, 20!, 30!, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$
- $\alpha = [0; 10^{10!}, 10^{20!}, 10^{30!}, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$

- $\alpha = [0; 10, 10^{10}, 10^{10^{10}}, 10^{10^{10^{10}}}, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$

- $\alpha = [0; 10, 10!, (10!)!, ((10!)!)!, \ldots] \implies 2.9221 < \theta(\alpha) < 7.9433$

§. 함수 Δ의 미분

보기. • $\alpha = [0; 10^1, 10^2, 10^3, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$

• $\alpha = [0; 10!, 20!, 30!, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$

• $\alpha = [0; 10^{10!}, 10^{20!}, 10^{30!}, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$

• $\alpha = [0; 10, 10^{10}, 10^{10^{10}}, 10^{10^{10^{10}}}, \ldots] \implies \theta(\alpha) = 1 \implies \Delta'(\alpha) = 0.$

• $\alpha = [0; 10, 10!, (10!)!, ((10!)!)!, \ldots] \implies 2.9221 < \theta(\alpha) < 7.9433$

정리. $x = [0; 10, 10!, (10!)!, ((10!)!)!, \ldots]$에서 $\Delta(x)$는 연속이지만 미분가능하지 않다.

§. $10, 10!, (10!)!, ((10!)!)!, \ldots$보다 더 빨리 증가하는 수열?

질문: $\theta(\alpha) = \infty$인 실수 α는 어떻게 생겼을까?

§. $10, 10!, (10!)!, ((10!)!)!, \ldots$보다 더 빨리 증가하는 수열?

질문: $\theta(\alpha) = \infty$인 실수 α는 어떻게 생겼을까?

보기. $\alpha = [0; 1, 2^2, 3^{3^3}, 4^{4^{4^4}}, 5^{5^{5^{5^5}}}, \ldots] \implies \theta(\alpha) = \infty$

§. $10, 10!, (10!)!, ((10!)!)!, \ldots$보다 더 빨리 증가하는 수열?

질문: $\theta(\alpha) = \infty$인 실수 α는 어떻게 생겼을까?

보기. $\alpha = [0; 1, 2^2, 3^{3^3}, 4^{4^{4^4}}, 5^{5^{5^{5^5}}}, \ldots] \quad \Longrightarrow \quad \theta(\alpha) = \infty$

정리. *$x = [0; 1, 2^2, 3^{3^3}, 4^{4^{4^4}}, 5^{5^{5^{5^5}}}, \ldots]$에서 $\Delta(x)$는 연속이지만 미분 가능하지 않다.*

감사합니다!