넓기문제와 실현문제에 대하여

박대희

전남대학교

제5회 무등수학 강연회
2012년 3월 30일

강의 순서

1. 유클리드 공간에 넣기
2. 근사(approximation)와 실현(realization)
3. 준대수적 변환군론

강의 순서

1. 유클리드 공간에 넣기
2. 근사(approximation)와 실현(realization)
3. 준대수적 변환군론

강의 순서

1. 유클리드 공간에 넣기
2. 근사(approximation)와 실현(realization)
3. 준대수적 변환군론

강의 순서

1. 유클리드 공간에 넣기
2. 근사(approximation)와 실현(realization)
3. 준대수적 변환군론

곡선이란 무엇인가?

- 곡선

정의

- 곡선은 연속사상 $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$로 정의한다.
- $C = f(I)$

- 나선
    - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

곡선이란 무엇인가?

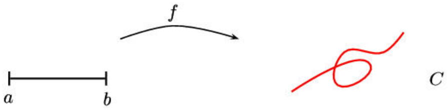
- 곡선

정의

- 곡선은 연속사상 $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$로 정의한다.
- $C = f(I)$

- 나선
  - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

- 곡선



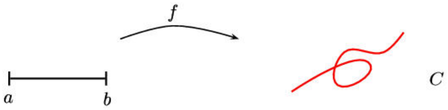
정의

- *곡선은 연속사상* $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$*로 정의한다.*
- $C = f(I)$

- 나선
  - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

곡선이란 무엇인가?

- 곡선



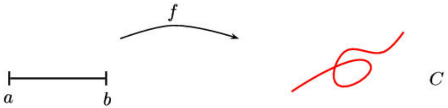
정의

- *곡선은 연속사상 $f\colon I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$로 정의한다.*
- $C = f(I)$

- 나선
  - $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

곡선이란 무엇인가?

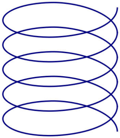
- 곡선



정의

- *곡선은 연속사상* $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$*로 정의한다.*
- $C = f(I)$

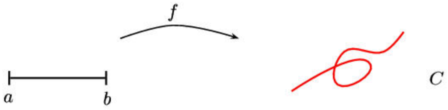
- 나선



- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

곡선이란 무엇인가?

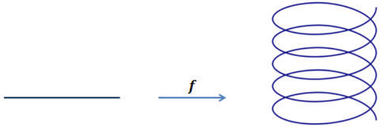
- 곡선



정의

- *곡선은 연속사상 $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$로 정의한다.*
- $C = f(I)$

- 나선



- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ f(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$

원과 원판

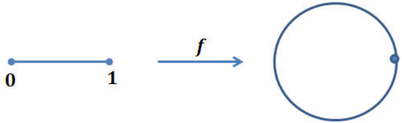
- 원 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
    - 연속사상 $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$
    - $S^1 = f(I)$, $f|_{[0,1)}$는 단사
- 원판 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
    - $f\colon I^2 = [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $f(\theta, r) = (r\cos 2\pi\theta, r\sin 2\pi\theta)$
    - $D = f(I^2)$

원과 원판

- 원 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
    - 연속사상 $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$
    - $S^1 = f(I)$, $f|_{[0,1)}$는 단사
- 원판 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
    - $f\colon I^2 = [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $f(\theta, r) = (r\cos 2\pi\theta, r\sin 2\pi\theta)$
    - $D = f(I^2)$

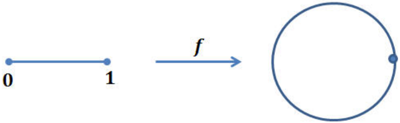
원과 원판

- 원 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$



  - 연속사상 $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$
  - $S^1 = f(I)$, $f|_{[0,1)}$는 단사
- 원판 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
  - $f\colon I^2 = [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $f(\theta, r) = (r\cos 2\pi\theta, r\sin 2\pi\theta)$
  - $D = f(I^2)$

- 원 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

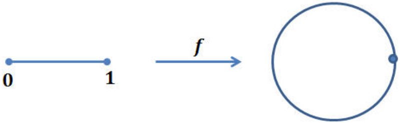


  - 연속사상 $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$
  - $S^1 = f(I)$, $\quad f|_{[0,1)}$는 단사

- 원판 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
  - $f\colon I^2 = [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $f(\theta, r) = (r \cos 2\pi\theta, r \sin 2\pi\theta)$
  - $D = f(I^2)$

원과 원판

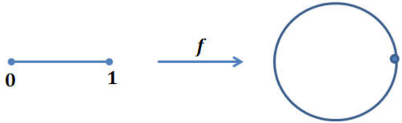
- 원 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$



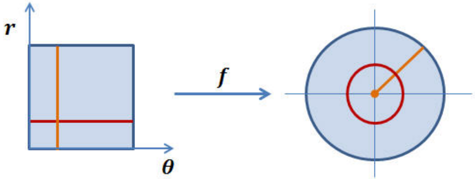
  - 연속사상 $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$
  - $S^1 = f(I)$, $f|_{[0,1)}$는 단사
- 원판 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$
  - $f\colon I^2 = [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $f(\theta, r) = (r \cos 2\pi\theta, r \sin 2\pi\theta)$
  - $D = f(I^2)$

원과 원판

- 원 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$



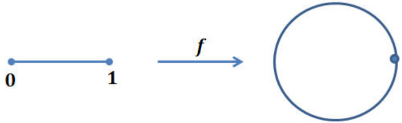
  - 연속사상 $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$
  - $S^1 = f(I)$, $f|_{[0,1)}$는 단사
- 원판 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$



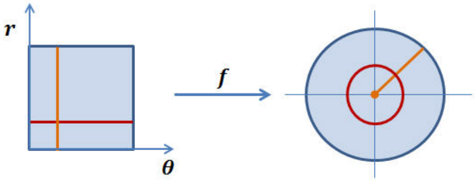
  - $f\colon I^2 = [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, $f(\theta, r) = (r \cos 2\pi\theta, r \sin 2\pi\theta)$
  - $D = f(I^2)$

원과 원판

- 원 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$



  - 연속사상 $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$
  - $S^1 = f(I)$, $f|_{[0,1)}$는 단사
- 원판 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqq 1\}$



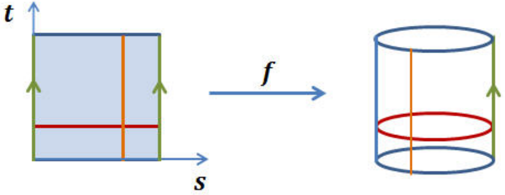
  - $f\colon I^2 = [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $f(\theta, r) = (r\cos 2\pi\theta, r\sin 2\pi\theta)$
  - $D = f(I^2)$

원통

- 원통 $C = S^1 \times I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$
  - 연속사상 $f\colon I^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(s, t) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, t)$
  - $C = S^1 \times I = f(I^2)$

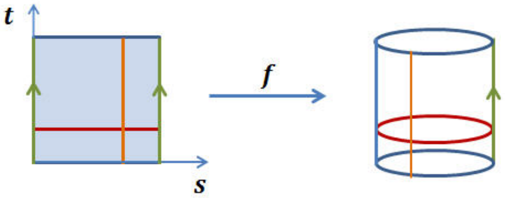
원통

- 원통 $C = S^1 \times I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$



- 연속사상 $f\colon I^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(s, t) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, t)$
- $C = S^1 \times I = f(I^2)$

- 원통 $C = S^1 \times I = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leqq z \leqq 1\}$



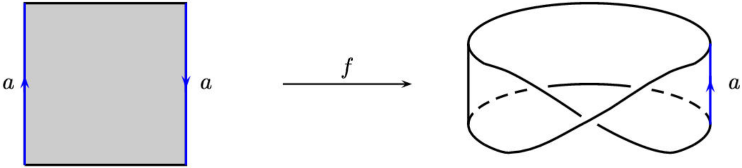
  - 연속사상 $f\colon I^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(s, t) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, t)$
  - $C = S^1 \times I = f(I^2)$

Möbius strip

- 뫼비우스 띠 M
  - $f\colon [0, 2\pi] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$,
    $f(u, v) = ((1 + \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} u) \cos u, (1 + \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} u) \sin u, \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} u)$
  - $f(I^2) = M \subset \mathbb{R}^3$

Möbius strip

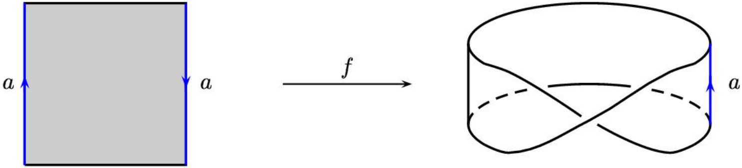
- 뫼비우스 띠 M



- $f\colon [0,2\pi]\times[-1,1]\to\mathbb{R}^3$,
  $f(u,v) = ((1+\frac{1}{2}v\cos\frac{1}{2}u)\cos u, (1+\frac{1}{2}v\cos\frac{1}{2}u)\sin u, \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}u)$
- $f(I^2) = M \subset \mathbb{R}^3$

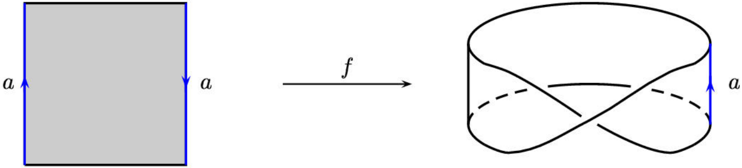
Möbius strip

- 뫼비우스 띠 M



  - $f\colon [0, 2\pi] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$,
    $f(u, v) = ((1 + \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} u) \cos u, (1 + \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} u) \sin u, \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} u)$
  - $f(I^2) = M \subset \mathbb{R}^3$

- 뫼비우스 띠 M

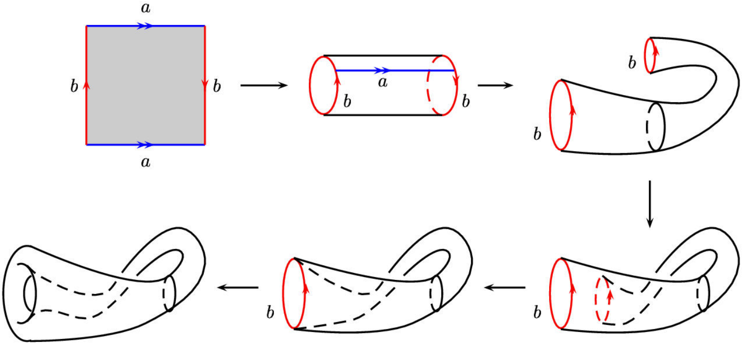


  - $f: [0, 2\pi] \times [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$,
    $f(u, v) = ((1 + \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} u) \cos u, (1 + \frac{1}{2} v \cos \frac{1}{2} u) \sin u, \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} u)$
  - $f(I^2) = M \subset \mathbb{R}^3$

Klein bottle

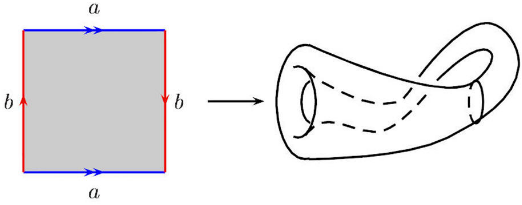
- 클라인 병 K

- 클라인 병 K



Klein bottle

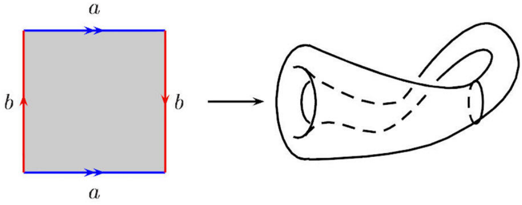
- 클라인 병 K



- $f : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^4$,
  $f(u, v) = ((2 + \cos v)\cos u, (2 + \cos v)\sin u, \sin v \cos u, \sin v \sin u)$
- $f([0, 2\pi]^2) = K \subset \mathbb{R}^4$
-

$$\begin{tikzcd} {[0,2\pi]^2} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ {[0,2\pi]^2/\sim} \arrow[r, "f_*"'] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd}$$

- 클라인 병 K

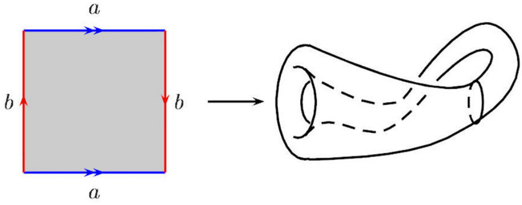


- $f\colon [0,2\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^4$,
  $f(u,v) = ((2+\cos v)\cos u, (2+\cos v)\sin u, \sin v\cos u, \sin v\sin u)$
- $f([0,2\pi]^2) = K \subset \mathbb{R}^4$
-

$$\begin{tikzcd}
{[0,2\pi]^2} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\
{[0,2\pi]^2/\sim} \arrow[r, "f_*"'] & \mathbb{R}^4
\end{tikzcd}$$

Klein bottle

- 클라인 병 K

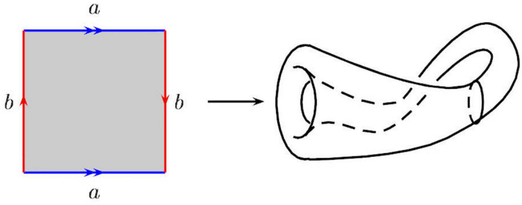


- $f\colon [0,2\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^4$,
  $f(u,v) = ((2+\cos v)\cos u, (2+\cos v)\sin u, \sin v\cos u, \sin v\sin u)$
- $f([0,2\pi]^2) = K \subset \mathbb{R}^4$
-

$$\begin{tikzcd}
{[0,2\pi]^2} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\
{[0,2\pi]^2/\sim} \arrow[r, "f_*"'] & \mathbb{R}^4
\end{tikzcd}$$

Klein bottle

- 클라인 병 K



  - $f\colon [0,2\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^4$,
    $f(u,v) = ((2+\cos v)\cos u, (2+\cos v)\sin u, \sin v\cos u, \sin v\sin u)$
  - $f([0,2\pi]^2) = K \subset \mathbb{R}^4$
  -

$$\begin{tikzcd}
{[0,2\pi]^2} \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\
{[0,2\pi]^2/\sim} \arrow[r, "f_*"'] & \mathbb{R}^4
\end{tikzcd}$$

Embedding theorem of manifolds

정의

사상 $f : X \to Y$가 **넣기사상**(embedding)이란

- f는 단사인 연속사상이고
- $f^{-1} : f(X) \to X$도 연속사상

정리 (Hassler Whitney, 1936)

모든 (매끄러운) n-차원 다양체는 $\mathbb{R}^{2n+1}$ (매끄럽게) 넣을 수 있다.

- 주어진 n-차원 다양체 M에 대해 넣기사상 $f : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$이 존재한다.
- $M \cong f(M) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$.

정의

사상 $f : X \to Y$가 넣기사상(embedding)이란

- *f는 단사인 연속사상이고*
- *$f^{-1} : f(X) \to X$도 연속사상*

정리 (Hassler Whitney, 1936)

모든 (매끄러운) n-차원 다양체는 $\mathbb{R}^{2n+1}$ (매끄럽게) 넣을 수 있다.

- 주어진 n-차원 다양체 M에 대해 넣기사상 $f : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$이 존재한다.
- $M \cong f(M) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$.

Embedding theorem of manifolds

정의

사상 $f : X \to Y$가 넓기사상(embedding)이란

- *f는 단사인 연속사상이고*
- *$f^{-1} : f(X) \to X$도 연속사상*

정리 (Hassler Whitney, 1936)

모든 (매끄러운) n-차원 다양체는 $\mathbb{R}^{2n+1}$ (매끄럽게) 넣을 수 있다.

- 주어진 n-차원 다양체 M에 대해 넣기사상 $f : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$이 존재한다.
- $M \cong f(M) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$.

Embedding theorem of manifolds

정의

사상 $f: X \to Y$가 ***넣기사상*** *(embedding)이란*

- *f는 단사인 연속사상이고*
- *$f^{-1}: f(X) \to X$도 연속사상*

정리 (Hassler Whitney, 1936)

모든 (매끄러운) n-차원 다양체는 $\mathbb{R}^{2n+1}$ (매끄럽게) 넣을 수 있다.

- 주어진 n-차원 다양체 M에 대해 넣기사상 $f: M \to \mathbb{R}^{2n+1}$이 존재한다.
- $M \cong f(M) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$.

Embedding theorem of manifolds

정의

사상 $f : X \to Y$가 넓기사상(embedding)이란

- *f는 단사인 연속사상이고*
- *$f^{-1} : f(X) \to X$도 연속사상*

정리 (Hassler Whitney, 1936)

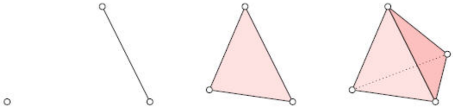
모든 (매끄러운) n-차원 다양체는 $\mathbb{R}^{2n+1}$ (매끄럽게) 넣을 수 있다.

- 주어진 n-차원 다양체 M에 대해 넓기사상 $f : M \to \mathbb{R}^{2n+1}$이 존재한다.
- $M \cong f(M) \subset \mathbb{R}^{2n+1}$.

강의 순서

단순 사상(simplicial map)

- simplex



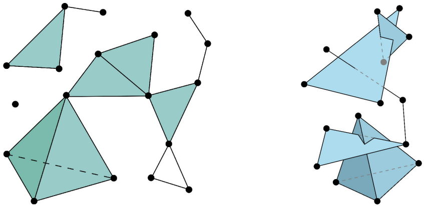
- simplicial complex

정의

- *단순 복합체(simplicial complex)란 단순체들의 모임(합집합?)이다. (단, 두 simplex의 교집합은 simplex 가 되어야 한다.)*
- *두 단순 복합체 K와 L 사이의 사상 $f : K \to L$가 단순사상(simplicial map)이란*
  - *f는 연속*
  - *f : vertex$\rightsquigarrow$vertex, simplex$\rightsquigarrow$simplex*

단순 사상(simplicial map)

- simplex
- simplicial complex



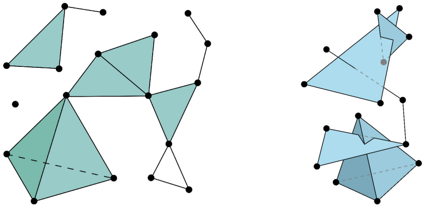
정의

- *단순 복합체(simplicial complex)란 단순체들의 모임(합집합?)이다. (단, 두 simplex의 교집합은 simplex 가 되어야 한다.)*
- *두 단순 복합체 K와 L 사이의 사상 $f : K \to L$가 단순사상(simplicial map)이란*
  - *f는 연속*
  - *f : vertex⇝vertex, simplex⇝simplex*

단순 사상(simplicial map)

- simplex

- simplicial complex



정의

- *단순 복합체(simplicial complex)란 단순체들의 모임(합집합?)이다. (단, 두 simplex의 교집합은 simplex 가 되어야 한다.)*
- *두 단순 복합체 K와 L 사이의 사상 $f : K \to L$가 단순사상(simplicial map)이란*
  - *f는 연속*
  - *f : vertex$\rightsquigarrow$vertex, simplex$\rightsquigarrow$simplex*

단순 근사

정리 (L. Brouwer)

K, L이 단순복합체라 하자. 만약 K가 유한단순복합체 이면 연속사상 $f : K \to L$은 단순사상으로 원하는 만큼 근사 시킬 수 있다.

정리 (J. Alexander, 1926)

K, L이 단순복합체이라 하자.
모든 연속사상 $f : K \to L$에 대해 f와 homotopic한 단순사상 $g : K \to L$이 존재한다.

단순 근사

정리 (L. Brouwer)

K, L이 단순복합체라 하자. 만약 K가 유한단순복합체 이면 연속사상 $f: K \to L$은 단순사상으로 원하는 만큼 근사 시킬 수 있다.

정리 (J. Alexander, 1926)

K, L이 단순복합체이라 하자.
모든 연속사상 $f: K \to L$에 대해 f와 homotopic한 단순사상 $g: K \to L$이 존재한다.

단순 근사

정리 (L. Brouwer)

K, L이 단순복합체라 하자. 만약 K가 유한단순복합체 이면 연속사상 $f: K \to L$은 단순사상으로 원하는 만큼 근사 시킬 수 있다.

정리 (J. Alexander, 1926)

K, L이 단순복합체이라 하자.
모든 연속사상 $f: K \to L$에 대해 f와 homotopic한 단순사상 $g: K \to L$이 존재한다.

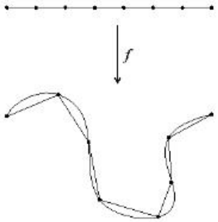
단순 근사

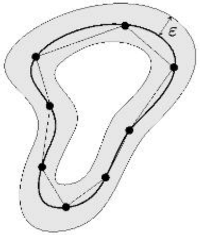
정리 (L. Brouwer)

K, L이 단순복합체라 하자. 만약 K가 유한단순복합체 이면 연속사상 $f : K \to L$은 단순사상으로 원하는 만큼 근사 시킬 수 있다.

정리 (J. Alexander, 1926)

K, L이 단순복합체이라 하자.
모든 연속사상 $f : K \to L$에 대해 f와 homotopic한 단순사상 $g : K \to L$이 존재한다.





단순 실현

정의

$f: X \to Y$가 *위상동형사상*이란

- f는 전단사 연속
- $f^{-1}: Y \to X$도 연속

정의

M이 *n-차원 다양체*란 각점의 근방이
$B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x^n < 1\}$ 또는
$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$ 형태임을 의미한다.

단순 실현

정의

$f: X \to Y$가 위상동형사상이란

- f는 전단사 연속
- $f^{-1}: Y \to X$도 연속

정의

M이 n-차원 다양체란 각점의 근방이
$B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x^n < 1\}$ 또는
$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$ 형태임을 의미한다.

단순 실현

정의

$f\colon X \to Y$가 *위상동형사상*이란

- f는 전단사 연속
- $f^{-1}\colon Y \to X$도 연속

정의

M이 *n-차원 다양체*란 각점의 근방이
$B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x^n < 1\}$ 또는
$H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$ 형태임을 의미한다.

단순 실현

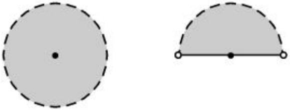
정의

$f: X \to Y$가 위상동형사상이란

- f는 전단사 연속
- $f^{-1}: Y \to X$도 연속

정의

M이 *n-차원 다양체*란 각점의 근방이
$B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x^n < 1\}$ 또는
$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geqq 0\}$ 형태임을 의미한다.



단순 실현

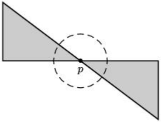
정의

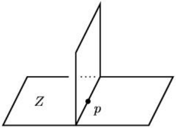
$f: X \to Y$가 *위상동형사상*이란

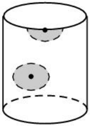
- f는 전단사 연속
- $f^{-1}: Y \to X$도 연속

정의

M이 *n-차원 다양체*란 각점의 근방이
$B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x^n < 1\}$ 또는
$H = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geqq 0\}$ 형태임을 의미한다.







단순 실현

정리

- *모든 1, 2, 3차원 다양체는 삼각분할이 가능하다.*
- *즉, 모든 1, 2, 3차원 다양체 M에 대하여 단순복합체 K와 위상동형사상 $f: K \to M$이 존재한다.*

- Triangulation of manifolds.
- Simplicial realization of manifolds
- $n = 2, 3$: T. Radó(1925) $\Rightarrow$ 곡면의 분류정리
- $n = 4$: 4-차원 다양체 E_8은 삼각분할을 갖지 않는다.
- $n \geq 5$: open problem

단순 실현

정리

- *모든 1, 2, 3차원 다양체는 삼각분할이 가능하다.*
- *즉, 모든 1, 2, 3차원 다양체 M에 대하여 단순복합체 K와 위상동형사상 $f : K \to M$이 존재한다.*

- Triangulation of manifolds.
- Simplicial realization of manifolds
- $n = 2, 3$: T. Radó(1925) $\Rightarrow$ 곡면의 분류정리
- $n = 4$: 4-차원 다양체 E_8은 삼각분할을 갖지 않는다.
- $n \geq 5$: open problem

단순 실현

정리

- *모든 1, 2, 3차원 다양체는 삼각분할이 가능하다.*
- *즉, 모든 1, 2, 3차원 다양체 M에 대하여 단순복합체 K와 위상동형사상 $f : K \to M$이 존재한다.*

- Triangulation of manifolds.
- Simplicial realization of manifolds
- $n = 2, 3$: T. Radó(1925) $\Rightarrow$ 곡면의 분류정리
- $n = 4$: 4-차원 다양체 E_8은 삼각분할을 갖지 않는다.
- $n \geq 5$: open problem

단순 실현

정리

- *모든 1, 2, 3차원 다양체는 삼각분할이 가능하다.*
- *즉, 모든 1, 2, 3차원 다양체 M에 대하여 단순복합체 K와 위상동형사상 $f : K \to M$이 존재한다.*

- Triangulation of manifolds.
- Simplicial realization of manifolds
- $n = 2, 3$: T. Radó(1925) $\Rightarrow$ 곡면의 분류정리
- $n = 4$: 4-차원 다양체 E_8은 삼각분할을 갖지 않는다.
- $n \geq 5$: open problem

단순 실현

정리

- *모든 1, 2, 3차원 다양체는 삼각분할이 가능하다.*
- *즉, 모든 1, 2, 3차원 다양체 M에 대하여 단순복합체 K와 위상동형사상 $f : K \to M$이 존재한다.*

- Triangulation of manifolds.
- Simplicial realization of manifolds
- $n = 2, 3$: T. Radó(1925) $\Rightarrow$ 곡면의 분류정리
- $n = 4$: 4-차원 다양체 E_8은 삼각분할을 갖지 않는다.
- $n \geq 5$: open problem

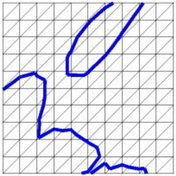
단순 실현

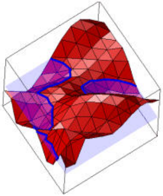
정리

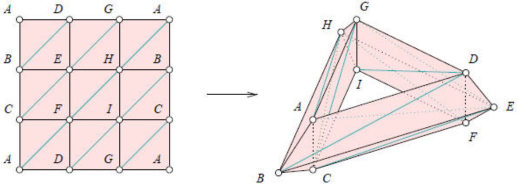
- *모든 1, 2, 3차원 다양체는 삼각분할이 가능하다.*
- *즉, 모든 1, 2, 3차원 다양체 M에 대하여 단순복합체 K와 위상동형사상 $f : K \to M$이 존재한다.*

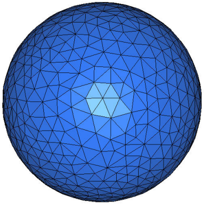
- Triangulation of manifolds.
- Simplicial realization of manifolds
- $n = 2, 3$: T. Radó(1925) $\Rightarrow$ 곡면의 분류정리
- $n = 4$: 4-차원 다양체 E_8은 삼각분할을 갖지 않는다.
- $n \geqq 5$: open problem

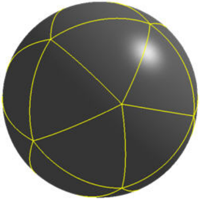
단순 실현

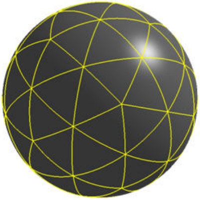


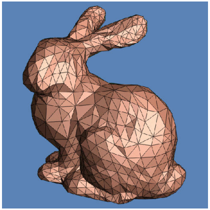












대수적 근사

Stone-Weierstrass theorem

만약 X가 $\mathbb{R}^m$상의 compact 공간이면 모든 연속사상 $f : X \to \mathbb{R}^n$은 다항함수 p로 원하는 만큼 근사 시킬 수 있다.

- $X = [a, b]$인 경우: K. Weierstrass(1885)
- X가 compact인 경우 : M. Stone(1937)
- Taylor Series : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

대수적 근사

Stone-Weierstrass theorem

만약 X가 $\mathbb{R}^m$상의 compact 공간이면 모든 연속사상 $f : X \to \mathbb{R}^n$은 다항함수 p로 원하는 만큼 근사 시킬 수 있다.

- $X = [a, b]$인 경우: K. Weierstrass(1885)
- X가 compact인 경우 : M. Stone(1937)
- Taylor Series : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

대수적 근사

Stone-Weierstrass theorem

만약 X가 $\mathbb{R}^m$상의 compact 공간이면 모든 연속사상 $f\colon X \to \mathbb{R}^n$은 다항함수 p로 원하는 만큼 근사 시킬 수 있다.

- $X = [a, b]$인 경우: K. Weierstrass(1885)
- X가 compact인 경우 : M. Stone(1937)
- Taylor Series : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

대수적 근사

Stone-Weierstrass theorem

만약 X가 $\mathbb{R}^m$상의 compact 공간이면 모든 연속사상 $f: X \to \mathbb{R}^n$은 다항함수 p로 원하는 만큼 근사 시킬 수 있다.

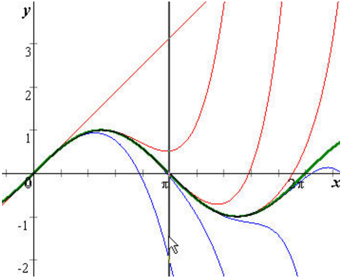
- $X = [a, b]$인 경우: K. Weierstrass(1885)
- X가 compact인 경우 : M. Stone(1937)
- Taylor Series : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

대수적 근사

Stone-Weierstrass theorem

만약 X가 $\mathbb{R}^m$상의 compact 공간이면 모든 연속사상 $f: X \to \mathbb{R}^n$은 다항함수 p로 원하는 만큼 근사 시킬 수 있다.

- $X = [a, b]$인 경우: K. Weierstrass(1885)
- X가 compact인 경우 : M. Stone(1937)
- Taylor Series : $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$



대수적 실현

정의

$M \subset \mathbb{R}^n$이 *대수적 다양체*란

- $M = p^{-1}(0)$인 다항함수 $p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$가 존재
- M은 미분 다양체이다.

Nash-Tognoli Theorem(1973)

모든 닫힌 매끄러운(closed smooth) 다양체는 대수적 다양체와 미분동형이다.

- Hilbert(1900) 16번째 문제. 실대수 곡선과 곡면의 위상에 대한 연구
- H. Seifert(1936) 다양체에 대한 대수적 근사 연구
- J. Nash(1952) 실 대수 다양체 연구
- A. Tognoli(1973) Nash-Tognoli 정리 완성

대수적 실현

정의

$M \subset \mathbb{R}^n$이 *대수적 다양체*란

- $M = p^{-1}(0)$인 다항함수 $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$가 존재
- M은 미분 다양체이다.

Nash-Tognoli Theorem(1973)

모든 닫힌 매끄러운(closed smooth) 다양체는 대수적 다양체와 미분동형이다.

- Hilbert(1900) 16번째 문제. 실대수 곡선과 곡면의 위상에 대한 연구
- H. Seifert(1936) 다양체에 대한 대수적 근사 연구
- J. Nash(1952) 실 대수 다양체 연구
- A. Tognoli(1973) Nash-Tognoli 정리 완성

대수적 실현

정의

$M \subset \mathbb{R}^n$이 *대수적 다양체*란

- $M = p^{-1}(0)$인 다항함수 $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$가 존재
- M은 미분 다양체이다.

Nash-Tognoli Theorem(1973)

모든 닫힌 매끄러운(closed smooth) 다양체는 대수적 다양체와 미분동형이다.

- Hilbert(1900) 16번째 문제. 실대수 곡선과 곡면의 위상에 대한 연구
- H. Seifert(1936) 다양체에 대한 대수적 근사 연구
- J. Nash(1952) 실 대수 다양체 연구
- A. Tognoli(1973) Nash-Tognoli 정리 완성

대수적 실현

정의

$M \subset \mathbb{R}^n$이 *대수적 다양체*란

- $M = p^{-1}(0)$인 다항함수 $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$가 존재
- M은 미분 다양체이다.

Nash-Tognoli Theorem(1973)

모든 닫힌 매끄러운(closed smooth) 다양체는 대수적 다양체와 미분동형이다.

- Hilbert(1900) 16번째 문제. 실대수 곡선과 곡면의 위상에 대한 연구
- H. Seifert(1936) 다양체에 대한 대수적 근사 연구
- J. Nash(1952) 실 대수 다양체 연구
- A. Tognoli(1973) Nash-Tognoli 정리 완성

대수적 실현

정의

$M \subset \mathbb{R}^n$이 *대수적 다양체*란

- $M = p^{-1}(0)$인 다항함수 $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$가 존재
- M은 미분 다양체이다.

Nash-Tognoli Theorem(1973)

모든 닫힌 매끄러운(closed smooth) 다양체는 대수적 다양체와 미분동형이다.

- Hilbert(1900) 16번째 문제. 실대수 곡선과 곡면의 위상에 대한 연구
- H. Seifert(1936) 다양체에 대한 대수적 근사 연구
- J. Nash(1952) 실 대수 다양체 연구
- A. Tognoli(1973) Nash-Tognoli 정리 완성

대수적 실현

정의

$M \subset \mathbb{R}^n$이 *대수적 다양체*란

- $M = p^{-1}(0)$인 다항함수 $p \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$가 존재
- M은 미분 다양체이다.

Nash-Tognoli Theorem(1973)

모든 닫힌 매끄러운(closed smooth) 다양체는 대수적 다양체와 미분동형이다.

- Hilbert(1900) 16번째 문제. 실대수 곡선과 곡면의 위상에 대한 연구
- H. Seifert(1936) 다양체에 대한 대수적 근사 연구
- J. Nash(1952) 실 대수 다양체 연구
- A. Tognoli(1973) Nash-Tognoli 정리 완성

대수적 실현

정의

$M \subset \mathbb{R}^n$이 *대수적 다양체*란

- $M = p^{-1}(0)$인 다항함수 $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$가 존재
- M은 미분 다양체이다.

Nash-Tognoli Theorem(1973)

모든 닫힌 매끄러운(closed smooth) 다양체는 대수적 다양체와 미분동형이다.

- Hilbert(1900) 16번째 문제. 실대수 곡선과 곡면의 위상에 대한 연구
- H. Seifert(1936) 다양체에 대한 대수적 근사 연구
- J. Nash(1952) 실 대수 다양체 연구
- A. Tognoli(1973) Nash-Tognoli 정리 완성

강의 순서

군 표현

- $M_n(\mathbb{R})$: $n \times n$ 행렬 집합
- $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid det(A) \neq 0\}$: $n \times n$ 정칙 행렬 집합
- $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^tA = AA^t = E\}$: 직교행렬 집합

정의

G, H가 군일 때,

- 함수 $f : G \to H$이 *group homomorphism*이란
  - $f(g_1g_2) = f(g_1)f(g_2)$
  - $f(e) = e'$
- 군 G의 표현*(reprentation)*이란 *group homomorphism* $\rho : G \to GL_n(\mathbb{R})$을 의미한다.

군 표현

- $M_n(\mathbb{R})$: $n \times n$ 행렬 집합
- $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid det(A) \neq 0\}$: $n \times n$ 정칙 행렬 집합
- $O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^t A = AA^t = E\}$: 직교행렬 집합

정의

G, H가 군일 때,

- *함수 $f: G \to H$이 group homomorphism이란*
  - $f(g_1 g_2) = f(g_1)f(g_2)$
  - $f(e) = e'$
- *군 G의 표현(reprentation)이란 group homomorphism $\rho: G \to GL_n(\mathbb{R})$을 의미한다.*

군 표현

- $S^1 \subset \mathbb{C}$에 복소수 곱연산 $\cdot$을 준 군 $G = (S^1, \cdot)$의 표현

$$\rho\colon G \to GL_2(\mathbb{R}), \quad \rho(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$G \cong \rho(G) \subset O_2(\mathbb{R})$$

군 표현

- $S^1 \subset \mathbb{C}$에 복소수 곱연산 $\cdot$을 준 군 $G = (S^1, \cdot)$의 표현

  $\rho\colon G \to GL_2(\mathbb{R}), \quad \rho(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

  $G \cong \rho(G) \subset O_2(\mathbb{R})$

군 표현

- $S^1 \subset \mathbb{C}$에 복소수 곱연산 $\cdot$을 준 군 $G = (S^1, \cdot)$의 표현

  $\rho\colon G \to GL_2(\mathbb{R}), \quad \rho(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

  $G \cong \rho(G) \subset O_2(\mathbb{R})$

군 표현

- $S^1 \subset \mathbb{C}$에 복소수 곱연산 $\cdot$을 준 군 $G = (S^1, \cdot)$의 표현
  $\rho\colon G \to GL_2(\mathbb{R}), \;\; \rho(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
  $G \cong \rho(G) \subset O_2(\mathbb{R})$

준대수적 공간

정의

$M \subset \mathbb{R}^n$: 준대수적(semialgebraic) $\Leftrightarrow \exists$ *유한개 다항함수 f_{ij}, g_{ij} s.t.*

$$M = \bigcup_i \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ f_{ij}(x) > 0, \ g_{ij}(x) = 0 \ \forall\, j\}.$$

- 보기: $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f(x,y) = y - x^2, \ g(x,y) = x - y + 2.$

준대수적 공간

정의

$M \subset \mathbb{R}^n$: *준대수적(semialgebraic)* $\Leftrightarrow \exists$ *유한개 다항함수* f_{ij}, g_{ij} *s.t.*

$$M = \bigcup_i \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ f_{ij}(x) > 0,\ g_{ij}(x) = 0 \ \forall\, j\}.$$

- 보기: $f, g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = y - x^2,\ g(x,y) = x - y + 2.$

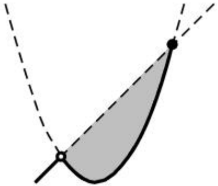
준대수적 공간

정의

$M \subset \mathbb{R}^n$: *준대수적(semialgebraic)* $\Leftrightarrow \exists$ *유한개 다항함수* f_{ij}, g_{ij} *s.t.*

$$M = \bigcup_i \{x \in \mathbb{R}^n \mid \ f_{ij}(x) > 0,\ g_{ij}(x) = 0 \ \forall\, j\}.$$

- 보기: $f, g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = y - x^2,\ g(x, y) = x - y + 2.$



준대수적 공간

성질 (H. Hironaka, 1975)

- *준대수적 공간은 준대수적으로 삼각분할 가능하다.*
- *즉, 임의의 준대수적 공간 X에 대하여 단순복합체 K와 준대수적 동형사상 $f : K \to X$가 존재한다.*

- 준대수적 공간은 유한개의 연결성분을 갖는다.

준대수적 공간

성질 (H. Hironaka, 1975)

- *준대수적 공간은 준대수적으로 삼각분할 가능하다.*
- *즉, 임의의 준대수적 공간 X에 대하여 단순복합체 K와 준대수적 동형사상 $f: K \to X$가 존재한다.*

- 준대수적 공간은 유한개의 연결성분을 갖는다.

준대수적 사상

정의

M, N: 준대수적 공간
연속사상 $f: M \to N$이 준대수적 $\Leftrightarrow$ 그래프가 준대수적

- $\sqrt[n]{x}$는 준대수적 사상이다.
  - $f(x) = \sqrt[n]{x}$는 연속이고
    $Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt[n]{x}, x \geq 0\}$
    $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y^n = 0, x \geq 0\}$
- $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\log x$는 준대수적이 아니다.

준대수적 사상

정의

M, N: 준대수적 공간
연속사상 $f : M \to N$이 준대수적 $\Leftrightarrow$ 그래프가 준대수적

- $\sqrt[n]{x}$는 준대수적 사상이다.
  - $f(x) = \sqrt[n]{x}$는 연속이고
    $Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt[n]{x}, x \geqq 0\}$
    $= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y^n = 0, x \geqq 0\}$
- $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\log x$는 준대수적이 아니다.

정의

M, N: 준대수적 공간

연속사상 $f: M \to N$이 준대수적 $\Leftrightarrow$ 그래프가 준대수적

- $\sqrt[n]{x}$는 준대수적 사상이다.
  - $f(x) = \sqrt[n]{x}$는 연속이고

    $$\begin{aligned} Gr(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt[n]{x}, x \geqq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y^n = 0, x \geqq 0\} \end{aligned}$$
- $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\log x$는 준대수적이 아니다.

준대수적 사상

정의

M, N: 준대수적 공간
연속사상 $f : M \to N$이 준대수적 $\Leftrightarrow$ 그래프가 준대수적

- $\sqrt[n]{x}$는 준대수적 사상이다.
  - $f(x) = \sqrt[n]{x}$는 연속이고
    $$Gr(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt[n]{x}, x \geqq 0\}$$
    $$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y^n = 0, x \geqq 0\}$$
- $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\log x$는 준대수적이 아니다.

준대수적 사상

정의

M, N: 준대수적 공간
연속사상 $f : M \to N$이 준대수적 $\Leftrightarrow$ 그래프가 준대수적

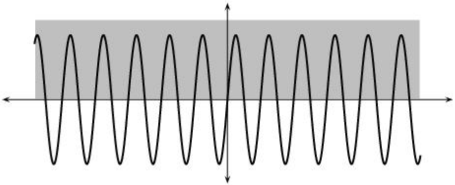
- $\sqrt[n]{x}$는 준대수적 사상이다.
  - $f(x) = \sqrt[n]{x}$는 연속이고
    $Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt[n]{x}, x \geqq 0\}$
    $\qquad\quad = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y^n = 0, x \geqq 0\}$
- $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\log x$는 준대수적이 아니다.

준대수적 사상

정의

M, N: 준대수적 공간
연속사상 $f: M \to N$이 준대수적 $\Leftrightarrow$ 그래프가 준대수적

- $\sqrt[n]{x}$는 준대수적 사상이다.
  - $f(x) = \sqrt[n]{x}$는 연속이고
    $$Gr(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt[n]{x}, x \geqq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y^n = 0, x \geqq 0\}$$
- $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, e^x, $\log x$는 준대수적이 아니다.



준대수적 군

정의

G가 준대수적 군(semialgebraic group)이란

- G는 준대수적 공간이고 군
- 두 사상

$$\mu: G \times G \to G,\ (g,h) \mapsto gh$$
$$i: G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$$

이 모두 (연속인) 준대수적 사상이다.

다음은 모두 준대수적 군이다.

- $GL_n(\mathbb{R}),\ O_n(\mathbb{R}),\ SO_n(\mathbb{R})$
- $GL_n(\mathbb{R})$의 모든 compact 부분군.

$$GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$$

준대수적 군

정의

G가 준대수적 군(semialgebraic group)이란

- G는 준대수적 공간이고 군
- 두 사상

$$\mu\colon G \times G \to G,\ (g,h) \mapsto gh$$
$$i\colon G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$$

이 모두 (연속인) 준대수적 사상이다.

다음은 모두 준대수적 군이다.

- $GL_n(\mathbb{R}),\ O_n(\mathbb{R}),\ SO_n(\mathbb{R})$
- $GL_n(\mathbb{R})$의 모든 compact 부분군.

$$GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$$

준대수적 군

정의

G가 준대수적 군(semialgebraic group)이란

- G는 준대수적 공간이고 군
- 두 사상

$$\mu: G \times G \to G, \ (g, h) \mapsto gh$$
$$i: G \to G, \ g \mapsto g^{-1}$$

이 모두 (연속인) 준대수적 사상이다.

다음은 모두 준대수적 군이다.

- $GL_n(\mathbb{R}), \ O_n(\mathbb{R}), \ SO_n(\mathbb{R})$
- $GL_n(\mathbb{R})$의 모든 compact 부분군.

$$GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$$

준대수적 군

정의

G가 준대수적 군(semialgebraic group)이란

- *G는 준대수적 공간이고 군*
- *두 사상*

$$\mu\colon G \times G \to G,\ (g,h) \mapsto gh$$
$$i\colon G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$$

이 모두 (연속인) 준대수적 사상이다.

다음은 모두 준대수적 군이다.

- $GL_n(\mathbb{R}),\ O_n(\mathbb{R}),\ SO_n(\mathbb{R})$
- $GL_n(\mathbb{R})$의 모든 compact 부분군.

$$GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n^2}$$

준대수적 작용

- 모든 준대수적 군의 준대수적 부분군은 닫힌집합이다.
- 준대수적 군의 닫힌 부분군은 준대수적이 아니다.
  - Lie 군의 닫힌 부분군은 Lie 군이다.
  - 준대수적 군 $GL_n(\mathbb{R})$의 닫힌 부분군

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & \sqrt{e^t} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}, \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{2}t} \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

정의

- M이 준대수적 G-공간이란 군 작용사상 $\theta : G \times M \to M$이 준대수적임을 의미한다.
  - $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$
  - $\theta(e, x) = x$
- $\theta(g, x) = gx$로 표기

준대수적 작용

- 모든 준대수적 군의 준대수적 부분군은 닫힌집합이다.
- 준대수적 군의 닫힌 부분군은 준대수적이 아니다.

준대수적 작용

- 모든 준대수적 군의 준대수적 부분군은 닫힌집합이다.
- 준대수적 군의 닫힌 부분군은 준대수적이 아니다.
  - Lie 군의 닫힌 부부군은 Lie 군이다.
  - 준대수적 군 $GL_n(\mathbb{R})$의 닫힌 부분군

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & \sqrt{e^t} \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad H = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{2}t} \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

정의

- M이 준대수적 G-공간이란 군 작용사상 $\theta : G \times M \to M$이 준대수적임을 의미한다.
  - $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$
  - $\theta(e, x) = x$
- $\theta(g, x) = gx$로 표기

준대수적 작용

- 모든 준대수적 군의 준대수적 부분군은 닫힌집합이다.
- 준대수적 군의 닫힌 부분군은 준대수적이 아니다.
  - Lie 군의 닫힌 부부군은 Lie 군이다.
  - 준대수적 군 $GL_n(\mathbb{R})$의 닫힌 부분군

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & \sqrt{e^t} \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad H = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{2}t} \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

정의

- *M이 준대수적 G-공간이란 군 작용사상 $\theta : G \times M \to M$이 준대수적임을 의미한다.*
  - $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$
  - $\theta(e, x) = x$
- $\theta(g, x) = gx$로 표기

준대수적 작용

- 모든 준대수적 군의 준대수적 부분군은 닫힌집합이다.
- 준대수적 군의 닫힌 부분군은 준대수적이 아니다.
  - Lie 군의 닫힌 부부군은 Lie 군이다.
  - 준대수적 군 $GL_n(\mathbb{R})$의 닫힌 부분군

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & \sqrt{e^t} \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad H = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{2}t} \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

정의

- M이 준대수적 G-공간이란 군 작용사상 $\theta : G \times M \to M$이 준대수적임을 의미한다.
  - $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$
  - $\theta(e, x) = x$
- $\theta(g, x) = gx$로 표기

준대수적 작용

- 모든 준대수적 군의 준대수적 부분군은 닫힌집합이다.
- 준대수적 군의 닫힌 부분군은 준대수적이 아니다.
  - Lie 군의 닫힌 부부군은 Lie 군이다.
  - 준대수적 군 $GL_n(\mathbb{R})$의 닫힌 부분군

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & \sqrt{e^t} \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad H = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{2}t} \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

정의

- *M이 준대수적 G-공간이란 군 작용사상 $\theta : G \times M \to M$이 준대수적임을 의미한다.*
  - $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$
  - $\theta(e, x) = x$
- $\theta(g, x) = gx$로 표기

준대수적 작용

- 모든 준대수적 군의 준대수적 부분군은 닫힌집합이다.
- 준대수적 군의 닫힌 부분군은 준대수적이 아니다.
  - Lie 군의 닫힌 부부군은 Lie 군이다.
  - 준대수적 군 $GL_n(\mathbb{R})$의 닫힌 부분군

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & \sqrt{e^t} \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}, \qquad H = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{\sqrt{2}t} \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

정의

- *M이 준대수적 G-공간이란 군 작용사상 $\theta : G \times M \to M$이 준대수적임을 의미한다.*
  - $\theta(g, \theta(h, x)) = \theta(gh, x)$
  - $\theta(e, x) = x$
- *$\theta(g, x) = gx$로 표기*

준대수적 작용

정의

- $f : M \to N$가 준대수적 G-사상이란
  - f는 G-사상 (즉, $f(gx) = gf(x)$)
  - f는 (연속) 준대수적 사상.
- 준대수적 G-공간이 proper란 다음 사상이 준대수적으로 proper 함을 의미한다: $\theta_* : G \times M \to M \times M$, $(g, x) = (gx, x)$

- 만약 G가 compact이면 모든 준대수적 G-공간은 proper이다.

준대수적 작용

정의

- $f : M \to N$가 준대수적 G-사상이란
  - f는 G-사상 (즉, $f(gx) = gf(x)$)
  - f는 (연속) 준대수적 사상.
- 준대수적 G-공간이 proper란 다음 사상이 준대수적으로 proper 함을 의미한다: $\theta_* : G \times M \to M \times M$, $(g, x) = (gx, x)$

- 만약 G가 compact이면 모든 준대수적 G-공간은 proper이다.

준대수적 작용

정의

- $f\colon M \to N$가 준대수적 G-사상이란
  - f는 G-사상 (즉, $f(gx) = gf(x)$)
  - f는 (연속) 준대수적 사상.
- 준대수적 G-공간이 proper란 다음 사상이 준대수적으로 proper 함을 의미한다: $\theta_*\colon G \times M \to M \times M$, $(g, x) = (gx, x)$

- 만약 G가 compact이면 모든 준대수적 G-공간은 proper이다.

준대수적 작용

정의

- $f: M \to N$가 *준대수적 G-사상*이란
  - f는 G-사상 (즉, $f(gx) = gf(x)$)
  - f는 (연속) 준대수적 사상.
- 준대수적 G-공간이 *proper*란 다음 사상이 준대수적으로 proper 함을 의미한다: $\theta_*: G \times M \to M \times M$, $(g, x) = (gx, x)$

- 만약 G가 compact이면 모든 준대수적 G-공간은 proper이다.

준대수적 작용

정리

모든 proper 준대수적 G-공간은 준대수적 G-CW 복합체 구조를 갖는다.

정리 (준대수적 넣기정리)

G가 선형(linear)일 때, 모든 proper 준대수적 G-공간에 대해 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_k(\mathbb{R})$과 준대수적 G-넣기사상 $f\colon M \to \mathbb{R}^k(\rho)$가 존재한다.

- 준대수적 군 G이 선형이란 적당한 자연수 n에 대해 단사(faithful)인 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_n(\mathbb{R})$이 존재함을 의미.
- $n \neq k$
- Slice theorem, 유한성, double induction

질문

준대수적 군 G에 대해 단사(faithful)인 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_n(\mathbb{R})$이 존재 하는가?

준대수적 작용

정리

모든 proper 준대수적 G-공간은 준대수적 G-CW 복합체 구조를 갖는다.

정리 (준대수적 넓기정리)

G가 선형(linear)일 때, 모든 proper 준대수적 G-공간에 대해 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_k(\mathbb{R})$과 준대수적 G-넓기사상 $f\colon M \to \mathbb{R}^k(\rho)$가 존재한다.

- 준대수적 군 G이 선형이란 적당한 자연수 n에 대해 단사(faithful)인 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_n(\mathbb{R})$이 존재함을 의미.
- $n \neq k$
- Slice theorem, 유한성, double induction

질문

준대수적 군 G에 대해 단사(faithful)인 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_n(\mathbb{R})$이 존재 하는가?

준대수적 작용

정리

모든 proper 준대수적 G-공간은 준대수적 G-CW 복합체 구조를 갖는다.

정리 (준대수적 넓기정리)

G가 선형(linear)일 때, 모든 proper 준대수적 G-공간에 대해 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_k(\mathbb{R})$과 준대수적 G-넓기사상 $f\colon M \to \mathbb{R}^k(\rho)$가 존재한다.

- 준대수적 군 G이 선형이란 적당한 자연수 n에 대해 단사(faithful)인 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_n(\mathbb{R})$이 존재함을 의미.
- $n \neq k$
- Slice theorem, 유한성, double induction

질문

준대수적 군 G에 대해 단사(faithful)인 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_n(\mathbb{R})$이 존재 하는가?

준대수적 작용

정리

모든 proper 준대수적 G-공간은 준대수적 G-CW 복합체 구조를 갖는다.

정리 (준대수적 넓기정리)

G가 선형(linear)일 때, 모든 proper 준대수적 G-공간에 대해 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_k(\mathbb{R})$과 준대수적 G-넓기사상 $f\colon M \to \mathbb{R}^k(\rho)$가 존재한다.

- 준대수적 군 G이 선형이란 적당한 자연수 n에 대해 단사(faithful)인 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_n(\mathbb{R})$이 존재함을 의미.
- $n \neq k$
- Slice theorem, 유한성, double induction

질문

준대수적 군 G에 대해 단사(faithful)인 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_n(\mathbb{R})$이 존재 하는가?

준대수적 작용

정리

모든 proper 준대수적 G-공간은 준대수적 G-CW 복합체 구조를 갖는다.

정리 (준대수적 넓기정리)

G가 선형(linear)일 때, 모든 proper 준대수적 G-공간에 대해 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_k(\mathbb{R})$과 준대수적 G-넓기사상 $f\colon M \to \mathbb{R}^k(\rho)$가 존재한다.

- 준대수적 군 G이 선형이란 적당한 자연수 n에 대해 단사(faithful)인 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_n(\mathbb{R})$이 존재함을 의미.
- $n \neq k$
- Slice theorem, 유한성, double induction

질문

준대수적 군 G에 대해 단사(faithful)인 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_n(\mathbb{R})$이 존재 하는가?

준대수적 작용

정리

모든 proper 준대수적 G-공간은 준대수적 G-CW 복합체 구조를 갖는다.

정리 (준대수적 넓기정리)

G가 선형(linear)일 때, 모든 proper 준대수적 G-공간에 대해 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_k(\mathbb{R})$과 준대수적 G-넓기사상 $f\colon M \to \mathbb{R}^k(\rho)$가 존재한다.

- 준대수적 군 G이 선형이란 적당한 자연수 n에 대해 단사(faithful)인 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_n(\mathbb{R})$이 존재함을 의미.
- $n \neq k$
- Slice theorem, 유한성, double induction

질문

준대수적 군 G에 대해 단사(faithful)인 준대수적 표현 $\rho\colon G \to GL_n(\mathbb{R})$이 존재 하는가?

준대수적 작용

정리

M, N이 proper 준대수적 G-공간, $f: M \to N$을 연속인 G-사상이라 하자.

- *만약 G와 M이 모두 컴팩트이면 f는 준대수적 G-사상으로 원하는 만큼 근사 시킬 수 있다.*
- *나머지 경우는 f와 homotopic한 준대수적 G-사상 $g: M \to N$이 존재한다.*

준대수적 작용

문제

- *유한개의 연결성분을 갖는 G-다양체와 G-위상동형인 준대수적 G-공간이 존재하는가?*
- *위상적 G-다발과 동형인 준대수적 G-다발이 존재하는가?*

$$\begin{tikzcd} & E_k(\Xi) \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "f,g"'] & G_k(\Xi) \end{tikzcd}$$

준대수적 작용

문제

- *유한개의 연결성분을 갖는 G-다양체와 G-위상동형인 준대수적 G-공간이 존재하는가?*
- *위상적 G-다발과 동형인 준대수적 G-다발이 존재하는가?*

$$\begin{tikzcd} & E_k(\Xi) \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "f{,}g"'] & G_k(\Xi) \end{tikzcd}$$

준대수적 작용

문제

- *유한개의 연결성분을 갖는 G-다양체와 G-위상동형인 준대수적 G-공간이 존재하는가?*
- *위상적 G-다발과 동형인 준대수적 G-다발이 존재하는가?*

$$\begin{tikzcd} & E_k(\Xi) \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[r, "f{,}g"'] & G_k(\Xi) \end{tikzcd}$$

준대수적 작용

문제

- *유한개의 연결성분을 갖는 G-다양체와 G-위상동형인 준대수적 G-공간이 존재하는가?*
- *위상적 G-다발과 동형인 준대수적 G-다발이 존재하는가?*

$$\begin{array}{ccc} & & E_k(\Xi) \\ & & \downarrow p \\ M & \xrightarrow[f,g]{} & G_k(\Xi) \end{array}$$