

작용소의 행렬표현과 그 응용

이 영 주

무등수학강연회
2012년 4월 27일

차 례

- 용어(행렬, 행렬식)의 유래
- 선형 작용소에 대한 행렬표현
- 곱 작용소 소개
- 응용 : 제로곱 문제와 교환문제

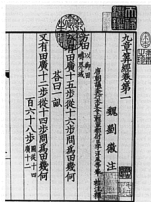
행렬(Matrix)?

- 행렬의 개념은 “The Nine Chapters on the Mathematical Art (BC 300-AD 200)” 에서 처음 이용 (처음것의 하나, 둘째것의 세, 세째것의 둘 등).

A page of “The nine...”

행렬(Matrix)?

- 행렬의 개념은 “The Nine Chapters on the Mathematical Art (BC 300-AD 200)” 에서 처음 이용 (처음것의 하나, 둘째것의 세, 세째것의 둘 등).



A page of “The nine...”

행렬(Matrix)?

- 행렬보다 **행렬식의 개념이 먼저 사용** (1693년 라이프니치가 로피탈에게 보낸 편지에서 연립방정식을 풀기위해 행렬식의 개념을 이용).
- **행렬식(determinant)**이라는 용어는 1815년 Cauchy에 의해 처음 사용.
- **행렬(Matrix)**이라는 용어는 1851년 Sylvester에 의해 정의되어 지고 계속 이용됨.

행렬(Matrix)?

- 행렬보다 **행렬식의 개념이 먼저 사용** (1693년 라이프니치가 로피탈에게 보낸 편지에서 연립방정식을 풀기위해 행렬식의 개념을 이용).
- **행렬식(determinant)**이라는 용어는 1815년 Cauchy에 의해 처음 사용.
- **행렬(Matrix)**이라는 용어는 1851년 Sylvester에 의해 정의되어 지고 계속 이용됨.

행렬(Matrix)?

- 행렬보다 **행렬식의 개념이 먼저 사용** (1693년 라이프니치가 로피탈에게 보낸 편지에서 연립방정식을 풀기위해 행렬식의 개념을 이용).
- **행렬식(determinant)**이라는 용어는 1815년 Cauchy에 의해 처음 사용.
- **행렬(Matrix)**이라는 용어는 1851년 Sylvester에 의해 정의되어 지고 계속 이용됨.

선형작용소에 대한 행렬표현

- 두 벡터 공간 V 와 W 에 대하여

$$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad \beta = \{w_1, \dots, w_m\}$$

를 각각 V 와 W 의 기저라고 하고, 선형작용소 $T : V \rightarrow W$ 를 생각하자.

- 각 $j = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여

$$T(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \dots + a_{mj}w_m$$

인 $a_{ij} \in \mathbb{C}$ 를 택하자.

선형작용소에 대한 행렬표현

- 두 벡터 공간 V 와 W 에 대하여

$$\alpha = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad \beta = \{w_1, \dots, w_m\}$$

를 각각 V 와 W 의 기저라고 하고, 선형작용소 $T : V \rightarrow W$ 를 생각하자.

- 각 $j = 1, 2, \dots, n$ 에 대하여

$$T(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \dots + a_{mj}w_m$$

인 $a_{ij} \in \mathbb{C}$ 를 택하자.

Matrix representations for linear operators

- 각 $x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \in V$ 에 대하여

$$T(x) = \sum_{j=1}^n x_j T(v_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^m a_{kj} w_k = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \right) w_k.$$

- 기저 β 에 대하여 $T(x)$ 의 좌표벡터는

$$[T(x)]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [T]_{\alpha}^{\beta} [x]_{\alpha}$$

- $[T]_{\alpha}^{\beta}$: T 의 표현행렬(the matrix representation for T).

Matrix representations for linear operators

- 각 $x = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n \in V$ 에 대하여

$$T(x) = \sum_{j=1}^n x_j T(v_j) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{k=1}^m a_{kj} w_k = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j \right) w_k.$$

- 기저 β 에 대하여 $T(x)$ 의 좌표벡터는

$$[T(x)]_{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [T]_{\alpha}^{\beta} [x]_{\alpha}$$

- $[T]_{\alpha}^{\beta}$: T 의 표현행렬(the matrix representation for T).

Matrix representations for linear operators

- 두 선형사상 $S : (U, \alpha) \rightarrow (V, \beta)$ 과 $T : (V, \beta) \rightarrow (W, \gamma)$ 에 대하여

$$[T \circ S]_{\alpha}^{\gamma} = [T]_{\beta}^{\gamma} [S]_{\alpha}^{\beta}.$$

- $TS := T \circ S$: product of S, T .

Matrix representations for linear operators

- 일반적으로 $V = W$ 가 무한차원 내적공간으로서 $\alpha = \beta$ 가 orthogonal 할때 T 의 표현행렬의 m 행 n 열은

$$a_{mn} = \langle Tv_n, v_m \rangle, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

응용: $L^2(T)$ space

Definition ($L^2(T)$ 공간)

- $T = \{z = (x, y) \in \mathbb{C} : |z|^2 = x^2 + y^2 = 1\}$
 $= \{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta : \theta \in [0, 2\pi]\}$: 단위원.
- $L^2(T)$: 아래를 만족하는 측도가능한 함수 $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ 의 모임.

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

- $L^2(T)$ 는 아래의 내적에 대하여 Hilbert 공간이다.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

응용: $L^2(T)$ space

Definition ($L^2(T)$ 공간)

- $T = \{z = (x, y) \in \mathbb{C} : |z|^2 = x^2 + y^2 = 1\}$
 $= \{e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta : \theta \in [0, 2\pi]\}$: 단위원.
- $L^2(T)$: 아래를 만족하는 측도가능한 함수 $f : T \rightarrow \mathbb{C}$ 의 모임.

$$\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 \frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

- $L^2(T)$ 는 아래의 내적에 대하여 Hilbert 공간이다.

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

- 함수 $e_n(e^{i\theta}) := e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ 에 대하여

$$\{e_n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

은 $L^2(T)$ 의 orthonormal basis 이다.

- 각 함수 $f \in L^2(T)$ 는 다음의 Fourier 급수 전개를 갖는다.

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta}.$$

여기서, $f_n = \langle f, e_n \rangle$ 은 푸리에 계수이다.

- 함수 $e_n(e^{i\theta}) := e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ 에 대하여

$$\{e_n : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

은 $L^2(T)$ 의 orthonormal basis 이다.

- 각 함수 $f \in L^2(T)$ 는 다음의 Fourier 급수 전개를 갖는다.

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta}.$$

여기서, $f_n = \langle f, e_n \rangle$ 은 푸리에 계수이다.

Multiplication operators

Definition (곱작용소)

주어진 유계함수 ϕ 에 대하여 곱작용소 $M_\phi : L^2(T) \rightarrow L^2(T)$ 를 생각하자.

$$M_\phi(f) = \phi f, \quad f \in L^2(T).$$

즉, $(M_\phi f)(e^{i\theta}) = \phi(e^{i\theta})f(e^{i\theta})$ 이다.

- M_ϕ : 유계인 선형작용소이다. 사실

$$M_\phi(af + bg) = \phi(af + bg) = aM_\phi(f) + bM_\phi(g)$$

$$\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$$

이 성립한다.

Multiplication operators

Definition (곱작용소)

주어진 유계함수 ϕ 에 대하여 곱작용소 $M_\phi : L^2(T) \rightarrow L^2(T)$ 를 생각하자.

$$M_\phi(f) = \phi f, \quad f \in L^2(T).$$

즉, $(M_\phi f)(e^{i\theta}) = \phi(e^{i\theta})f(e^{i\theta})$ 이다.

- M_ϕ : 유계인 선형작용소이다. 사실

$$M_\phi(af + bg) = \phi(af + bg) = aM_\phi(f) + bM_\phi(g)$$

$$\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$$

이 성립한다.

Matrix for multiplication operators

- 각 $m, n \in \mathbb{Z}$ 과 기호 ϕ 의 Fourier 급수전개

$$\phi(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \phi, e_n \rangle e^{in\theta}$$

에 대하여

$$\begin{aligned} \langle M_\phi e_n, e_m \rangle &= \langle \phi e_n, e_m \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) e^{in\theta} \overline{e^{im\theta}} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta}) e^{-i(m-n)\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \langle \phi, e_{m-n} \rangle \\ &= \phi_{m-n}. \end{aligned}$$

Matrix for multiplication operators

- 그래서 M_ϕ 의 행렬의 m 행 n 열은

$$\langle M_\phi e_n, e_m \rangle = \phi_{m-n}$$

이다.

- 또한 $(m+1)$ 행 $(n+1)$ 열은

$$\langle M_\phi e_{n+1}, e_{m+1} \rangle = \phi_{m+1-n-1} = \phi_{m-n}.$$

이다.

Matrix for multiplication operators

- 그래서 M_ϕ 의 행렬의 m 행 n 열은

$$\langle M_\phi e_n, e_m \rangle = \phi_{m-n}$$

이다.

- 또한 $(m+1)$ 행 $(n+1)$ 열은

$$\langle M_\phi e_{n+1}, e_{m+1} \rangle = \phi_{m+1-n-1} = \phi_{m-n}.$$

이다.

Matrix for multiplication operators

- M_ϕ 의 행렬의 (m, n) entry은 ϕ_{m-n} 이고, 그 행렬표현은

$$[M_\phi] = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \ddots & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \cdots & \\ \ddots & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \cdots \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \cdots \\ \cdots & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \ddots \\ & \cdots & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Toeplitz matrix

Definition (Toeplitz 행렬)

주어진 행렬 $[a_{mn}]$ 이 모든 m, n 에 대하여 $a_{m,n} = a_{m+1,n+1}$ 을 만족할 때 그 행렬을 **Toeplitz 행렬**이라고 한다.

Otto Toeplitz(1881-1940)

(University of Breslau-Göttingen University-University of Kiel)

Toeplitz matrix

Definition (Toeplitz 행렬)

주어진 행렬 $[a_{mn}]$ 이 모든 m, n 에 대하여 $a_{m,n} = a_{m+1,n+1}$ 을 만족할 때 그 행렬을 **Toeplitz 행렬**이라고 한다.



Otto Toeplitz(1881-1940)

(University of Breslau-Göttingen University-University of Kiel)

- 예제 1: 유한 Toeplitz 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Toeplitz matrix

- 예제 2: one side 무한 Toeplitz 행렬

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & & \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots & \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

- 예제 3: one side 무한 Toeplitz 행렬

$$\begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \ddots & a_0 & a_{-1} & a_{-2} \\ \ddots & a_1 & a_0 & a_{-1} \\ \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{bmatrix}.$$

Matrix for multiplication operators

- 곱작용소의 행렬은 (two side 무한) Toeplitz 행렬이다.

$$[M_\phi] = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \ddots & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \dots & \\ \ddots & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \dots \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \dots \\ \dots & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \ddots \\ & \dots & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Matrix for multiplication operators

그 역도 성립함이 알려졌다.

Theorem (Brown-Halmos, 1964)

$L^2(T)$ 에서 유계인 선형작용소 T 에 대하여 $T = M_\phi$ 이기위한 필요충분조건은 $\{e^{in\theta}\}$ 에 대한 T 의 행렬이 Toeplitz 행렬이다.

• two side infinite Toeplitz 행렬은 one infinite Toeplitz 행렬보다 다루기 쉽고 연구하기에 재미가 덜 하다(to someone).

예를 들어, $M_{\phi_1} M_{\phi_2} = M_{\phi_1 \phi_2}$.

Matrix for multiplication operators

그 역도 성립함이 알려졌다.

Theorem (Brown-Halmos, 1964)

$L^2(T)$ 에서 유계인 선형작용소 T 에 대하여 $T = M_\phi$ 이기위한 필요충분조건은 $\{e^{in\theta}\}$ 에 대한 T 의 행렬이 Toeplitz 행렬이다.

- two side infinite Toeplitz 행렬은 one infinite Toeplitz 행렬보다 다루기 쉽고 연구하기에 재미가 덜 하다(to someone).

예를 들어, $M_{\phi_1} M_{\phi_2} = M_{\phi_1 \phi_2}$.

Matrix for multiplication operators

- M_ϕ 의 행렬표현에서 lower right corner에 관심을 갖자.

$$M_\phi = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

Matrix for multiplication operators

- M_ϕ 의 행렬표현에서 lower right corner에 관심을 갖자.

$$M_\phi = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ \ddots & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & & \\ \ddots & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \\ & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} \\ & & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \ddots \\ & & & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

- 위의 red 부분은 M_ϕ 를 정의역과 공변역을 $\{e^{in\theta} : n \geq 0\}$ 에 의해 생성된 부분공간에 제한한 작용소의 대응행렬이다.

ONB $\{e^{in\theta} : n \geq 0\}$ 에 의해 생성된 부분공간을 생각하자.

Definition (Hardy 공간 H^2)

$$H^2 = \{f \in L^2(T) : f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\theta}\}.$$

- 함수 $f \in H^2$ 에 대하여

$$f_n = \langle f, e_n \rangle = 0, \quad n = -1, -2, \dots$$

- $H^2 \subset L^2(T)$ closed.

ONB $\{e^{in\theta} : n \geq 0\}$ 에 의해 생성된 부분공간을 생각하자.

Definition (Hardy 공간 H^2)

$$H^2 = \{f \in L^2(T) : f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\theta}\}.$$

- 함수 $f \in H^2$ 에 대하여

$$f_n = \langle f, e_n \rangle = 0, \quad n = -1, -2, \dots$$

- $H^2 \subset L^2(T)$ closed.

ONB $\{e^{in\theta} : n \geq 0\}$ 에 의해 생성된 부분공간을 생각하자.

Definition (Hardy 공간 H^2)

$$H^2 = \{f \in L^2(T) : f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\theta}\}.$$

- 함수 $f \in H^2$ 에 대하여

$$f_n = \langle f, e_n \rangle = 0, \quad n = -1, -2, \dots$$

- $H^2 \subset L^2(T)$ closed.

- 다음의 사상은 $L^2(T)$ 에서 H^2 로의 정사형 P 이다.

$$L^2(T) \ni \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\theta} \in H^2$$

- 즉,

$$P \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} f_n e^{in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\theta} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\theta}.$$

- 다음의 사상은 $L^2(T)$ 에서 H^2 로의 정사형 P 이다.

$$L^2(T) \ni \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n e^{in\theta} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\theta} \in H^2$$

- 즉,

$$P \left[\sum_{n=-\infty}^{-1} f_n e^{in\theta} + \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\theta} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\theta}.$$

- 각 $f(e^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{in\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n (e^{i\theta})^n \in H^2$ 에 대하여

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad |z| < 1$$

는 단위원판에서 해석함수(analytic function)이다.

Hardy space

- M_ϕ 의 행렬에서 lower right corner 을 다시 보자.

$$M_\phi = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ \ddots & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & & & \\ \ddots & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & & \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & & \\ & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \ddots & \\ & & \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Hardy space

- M_ϕ 의 행렬에서 lower right corner 를 T_ϕ 의 행렬이라고 하자.

$$T_\phi = \begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \cdots & & \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \ddots & \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

- 그때, 정사형 $P : L^2(T) \rightarrow H^2$ 에 대하여

$$T_\phi = PM_\phi P$$

을 만족한다.

Hardy space

- M_ϕ 의 행렬에서 lower right corner 를 T_ϕ 의 행렬이라고 하자.

$$T_\phi = \begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \cdots & & \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \ddots & \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

- 그때, 정사형 $P : L^2(T) \rightarrow H^2$ 에 대하여

$$T_\phi = PM_\phi P$$

을 만족한다.

Toeplitz operators

Definition (Toeplitz 작용소)

주어진 $\phi \in L^\infty(T)$ 에 대하여 **Toeplitz 작용소** $T_\phi : H^2 \rightarrow H^2$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$T_\phi f = PM_\phi(f) = P(\phi f) \quad f \in H^2.$$

여기서, $P : L^2(T) \rightarrow H^2$ 는 정사형이다.

- T_ϕ : 유계인 선형작용소이고

$$\|T_\phi\| = \|\phi\|_\infty$$

이 성립한다.

Toeplitz operators

Definition (Toeplitz 작용소)

주어진 $\phi \in L^\infty(T)$ 에 대하여 **Toeplitz 작용소** $T_\phi : H^2 \rightarrow H^2$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$T_\phi f = PM_\phi(f) = P(\phi f) \quad f \in H^2.$$

여기서, $P : L^2(T) \rightarrow H^2$ 는 정사형이다.

- T_ϕ : 유계인 선형작용소이고

$$\|T_\phi\| = \|\phi\|_\infty$$

이 성립한다.

Toeplitz operators

- 기호 $\phi(e^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n e^{in\theta} \in L^\infty(T)$ 에 대하여

$$[T_\phi] = \begin{bmatrix} \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \cdots & & \\ \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \phi_{-2} & \ddots & \\ \phi_2 & \phi_1 & \phi_0 & \phi_{-1} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Toeplitz operators

- T_ϕ 의 adjoint 작용소 T_ϕ^* 의 행렬표현을 보자.

$$\overline{\phi(e^{i\theta})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\phi_n} e^{-in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\phi_{-n}} e^{in\theta}$$

이므로

$$[T_\phi^*] = \begin{bmatrix} \overline{\phi_0} & \overline{\phi_1} & \overline{\phi_2} & & \\ \overline{\phi_{-1}} & \overline{\phi_0} & \overline{\phi_1} & \overline{\phi_2} & \ddots \\ \overline{\phi_{-2}} & \overline{\phi_{-1}} & \overline{\phi_0} & \overline{\phi_1} & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = [T_{\overline{\phi}}].$$

- $T_\phi^* = T_{\overline{\phi}}$.

Toeplitz operators

- T_ϕ 의 adjoint 작용소 T_ϕ^* 의 행렬표현을 보자.

$$\overline{\phi(e^{i\theta})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\phi_n} e^{-in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{\phi_{-n}} e^{in\theta}$$

이므로

$$[T_\phi^*] = \begin{bmatrix} \overline{\phi_0} & \overline{\phi_1} & \overline{\phi_2} & & \\ \overline{\phi_{-1}} & \overline{\phi_0} & \overline{\phi_1} & \overline{\phi_2} & \ddots \\ \overline{\phi_{-2}} & \overline{\phi_{-1}} & \overline{\phi_0} & \overline{\phi_1} & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} = [T_{\overline{\phi}}].$$

- $T_\phi^* = T_{\overline{\phi}}$.

Toeplitz operators

- $T_\phi = 0 \iff \phi = 0$ 이고, 다음의 함수는 일대일이다.

$$\phi \mapsto T_\phi.$$

- 위의 결과를 보면 다음의 질문은 아주 자연스럽다.

Question (제로곱 문제)

두 symbols ϕ_1, ϕ_2 에 대하여 다음이 성립하는가?

$$T_{\phi_1} T_{\phi_2} = 0 \iff \phi_1 = 0 \text{ or } \phi_2 = 0.$$

Toeplitz operators

- $T_\phi = 0 \iff \phi = 0$ 이고, 다음의 함수는 일대일이다.

$$\phi \mapsto T_\phi.$$

- 위의 결과를 보면 다음의 질문은 아주 자연스럽다.

Question (제로곱 문제)

두 symbols ϕ_1, ϕ_2 에 대하여 다음이 성립하는가?

$$T_{\phi_1} T_{\phi_2} = 0 \iff \phi_1 = 0 \text{ or } \phi_2 = 0.$$

Product problem

Question (곱문제)

세 symbols ϕ_1, ϕ_2, g 에 대하여 다음이 성립하는가?

$$T_{\phi_1} T_{\phi_2} = T_g.$$

다른 표현으로 두 Toeplitz 행렬의 곱이 언제 다른 Toeplitz 행렬이 되는가?

- Easy: $T_{\phi_1} T_{\phi_2} = T_{\phi_1 \phi_2}$ if $\overline{\phi_1} \in H^2$ or $\phi_2 \in H^2$. 즉,

$$\phi_1 = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n e^{in\theta} \quad \text{or} \quad \phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{in\theta}.$$

Product problem

Question (곱문제)

세 symbols ϕ_1, ϕ_2, g 에 대하여 다음이 성립하는가?

$$T_{\phi_1} T_{\phi_2} = T_g.$$

다른 표현으로 두 Toeplitz 행렬의 곱이 언제 다른 Toeplitz 행렬이 되는가?

- Easy: $T_{\phi_1} T_{\phi_2} = T_{\phi_1 \phi_2}$ if $\overline{\phi_1} \in H^2$ or $\phi_2 \in H^2$. 즉,

$$\phi_1 = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n e^{in\theta} \quad \text{or} \quad \phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{in\theta}.$$

Product problem

위 사실로부터 다음을 얻는다.

Lemma (One direction)

만약 $\overline{\phi_1} \in H^2$ or $\phi_2 \in H^2$ 이고 $g = \phi_1\phi_2$ 이면,

$$T_{\phi_1} T_{\phi_2} = T_{\phi_1\phi_2} = T_g$$

이 성립한다.

- 위의 역은 어떠한가요?

위 사실로부터 다음을 얻는다.

Lemma (One direction)

만약 $\overline{\phi_1} \in H^2$ or $\phi_2 \in H^2$ 이고 $g = \phi_1\phi_2$ 이면,

$$T_{\phi_1} T_{\phi_2} = T_{\phi_1\phi_2} = T_g$$

이 성립한다.

- 위의 역은 어떠한가요?

Product problem

- (역) 두 기호의 푸리에 급수전개를 생각하자.

$$\phi_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}, \quad \phi_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta}.$$

- $[c_{ij}] = T_g = T_{\phi_1} T_{\phi_2}$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \cdots \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \ddots \\ b_2 & b_1 & b_0 & b_{-1} & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Product problem

- (역) 두 기호의 푸리에 급수전개를 생각하자.

$$\phi_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}, \quad \phi_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta}.$$

- $[c_{ij}] = T_g = T_{\phi_1} T_{\phi_2}$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots & \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \cdots & \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \ddots \\ b_2 & b_1 & b_0 & b_{-1} & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Product problem

그래서, 각 $i, j \geq 0$ 에 대하여

- $c_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i-k} b_{k-j},$
- $$\begin{aligned} c_{i+1,j+1} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_{i+1-k} b_{k-1-j} \\ &= a_{i+1} b_{-j-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{i+1-k} b_{k-1-j} \\ &= a_{i+1} b_{-j-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{i-k} b_{k-j} \\ &= a_{i+1} b_{-j-1} + c_{ij}. \end{aligned}$$

Product problem

- Note: $[c_{ij}] = T_g$: Toeplitz 행렬 $\implies c_{i+1,j+1} = c_{ij}$.
- $T_{\phi_1} T_{\phi_2} = T_g \implies a_{i+1} b_{-j-1} = 0$ for all $i, j \geq 0$. 그래서,

$$\phi_1 = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n e^{in\theta} \quad \text{or} \quad \phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{in\theta}.$$

- $T_g = T_{\phi_1} T_{\phi_2} = T_{\phi_1 \phi_2} \implies T_{g - \phi_1 \phi_2} = 0 \implies g = \phi_1 \phi_2$.

Product problem

- Note: $[c_{ij}] = T_g$: Toeplitz 행렬 $\implies c_{i+1,j+1} = c_{ij}$.
- $T_{\phi_1} T_{\phi_2} = T_g \implies a_{i+1} b_{-j-1} = 0$ for all $i, j \geq 0$. 그래서,

$$\phi_1 = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n e^{in\theta} \quad \text{or} \quad \phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{in\theta}.$$

- $T_g = T_{\phi_1} T_{\phi_2} = T_{\phi_1 \phi_2} \implies T_{g - \phi_1 \phi_2} = 0 \implies g = \phi_1 \phi_2$.

Product problem

- Note: $[c_{ij}] = T_g$: Toeplitz 행렬 $\implies c_{i+1,j+1} = c_{ij}$.
- $T_{\phi_1} T_{\phi_2} = T_g \implies a_{i+1} b_{-j-1} = 0$ for all $i, j \geq 0$. 그래서,

$$\phi_1 = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n e^{in\theta} \quad \text{or} \quad \phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{in\theta}.$$

- $T_g = T_{\phi_1} T_{\phi_2} = T_{\phi_1 \phi_2} \implies T_{g - \phi_1 \phi_2} = 0 \implies g = \phi_1 \phi_2$.

Product problem

- Note: $[c_{ij}] = T_g$: Toeplitz 행렬 $\implies c_{i+1,j+1} = c_{ij}$.
- $T_{\phi_1} T_{\phi_2} = T_g \implies a_{i+1} b_{-j-1} = 0$ for all $i, j \geq 0$. 그래서,

$$\phi_1 = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n e^{in\theta} \quad \text{or} \quad \phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{in\theta}.$$

- $T_g = T_{\phi_1} T_{\phi_2} = T_{\phi_1 \phi_2} \implies T_{g - \phi_1 \phi_2} = 0 \implies g = \phi_1 \phi_2$.

위의 과정을 종합하면 다음을 얻는다.

Theorem (Brown-Halmos, 64)

세 symbols ϕ_1, ϕ_2, g 에 대하여 다음이 성립한다.

$$T_{\phi_1} T_{\phi_2} = T_g \iff (a) \overline{\phi_1} \in H^2 \text{ or } \phi_2 \in H^2, \\ (b) g = \phi_1 \phi_2.$$

특별히 $g = 0$ 인 경우가 앞에서 제기한 제로곱 문제이다.

Question (제로곱문제)

두 symbols ϕ_1, ϕ_2 에 대하여 다음이 언제 성립하는가?

$$T_{\phi_1} T_{\phi_2} = 0.$$

Zero product problem

- Recall : $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ or } B = 0$.

Corollary (제로곱 정리)

두 symbols ϕ_1, ϕ_2 에 대하여 다음이 성립한다.

$$T_{\phi_1} T_{\phi_2} = 0 \iff \overline{\phi_1} \in H^2 \text{ or } \phi_2 \in H^2, \text{ and } \phi_1 \phi_2 = 0$$

$$\iff \phi_1 = 0 \text{ or } \phi_2 = 0$$

$$\iff T_{\phi_1} = 0 \text{ or } T_{\phi_2} = 0.$$

- There are no zero divisors.

Zero product problem

- Recall : $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0 \text{ or } B = 0$.

Corollary (제로곱 정리)

두 symbols ϕ_1, ϕ_2 에 대하여 다음이 성립한다.

$$T_{\phi_1} T_{\phi_2} = 0 \iff \overline{\phi_1} \in H^2 \text{ or } \phi_2 \in H^2, \text{ and } \phi_1 \phi_2 = 0$$

$$\iff \phi_1 = 0 \text{ or } \phi_2 = 0$$

$$\iff T_{\phi_1} = 0 \text{ or } T_{\phi_2} = 0.$$

- There are no zero divisors.

Zero product problem

Question (일반적 제로곱 문제)

여러개의 *symbols* $\phi_1, \dots, \phi_N$ 에 대하여 다음이 성립하는가?

$$T_{\phi_1} T_{\phi_2} \cdots T_{\phi_N} = 0 \implies \text{one of } \phi_j = 0.$$

- Brown-Halmos(1964): $N = 2$.
- Guo(1996): $N = 5$.
- Gu(2000): $N = 6$.
- Aleman-Vukotic(2009): true for general N .
- Open for the higher dimensional cases.

Zero product problem

Question (일반적 제로곱 문제)

여러개의 symbols $\phi_1, \dots, \phi_N$ 에 대하여 다음이 성립하는가?

$$T_{\phi_1} T_{\phi_2} \cdots T_{\phi_N} = 0 \implies \text{one of } \phi_j = 0.$$

- Brown-Halmos(1964): $N = 2$.
- Guo(1996): $N = 5$.
- Gu(2000): $N = 6$.
- Aleman-Vukotic(2009): true for general N .
- Open for the higher dimensional cases.

Zero sum of products

다른 각도에서 일반적인 문제를 생각해 봅시다.

Question (제로 합 문제)

$f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_N$ 에 대하여 언제 다음이 성립하는가?

$$T_{f_1} T_{g_1} + T_{f_2} T_{g_2} + \dots + T_{f_N} T_{g_N} = 0.$$

특별한 경우 :

- $N = 2, g_2 = 1$: product 문제.
- $N = 1$: zero product 문제.

Zero sum of products

다른 각도에서 일반적인 문제를 생각해 봅시다.

Question (제로 합 문제)

$f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_N$ 에 대하여 언제 다음이 성립하는가?

$$T_{f_1} T_{g_1} + T_{f_2} T_{g_2} + \dots + T_{f_N} T_{g_N} = 0.$$

특별한 경우 :

- $N = 2, g_2 = 1$: product 문제.
- $N = 1$: zero product 문제.

Commuting problem

특별히 $N = 2$, $f = f_1 = -g_2$, $g = g_1 = f_2$ 경우를 생각하자.

Question (교환성 문제)

두 기호 f, g 에 대하여 다음이 언제 성립하는가?

$$[T_f, T_g] = T_f T_g - T_g T_f = 0, \quad \text{or} \quad T_f T_g = T_g T_f.$$

어렵지않아요 : They are commuting if

- $f, g \in H^2$. ($T_f T_g = T_{fg} = T_g T_f$)
- $\bar{f}, \bar{g} \in H^2$. ($T_{\bar{f}} T_{\bar{g}} = T_{\bar{g}} T_{\bar{f}} \Rightarrow T_{\bar{f}}^* T_{\bar{g}}^* = T_{\bar{g}}^* T_{\bar{f}}^* \Rightarrow T_f T_g = T_g T_f$).
- $f = \alpha g + \beta$.
- 위의 역은 성립하나요?

Commuting problem

특별히 $N = 2$, $f = f_1 = -g_2$, $g = g_1 = f_2$ 경우를 생각하자.

Question (교환성 문제)

두 기호 f, g 에 대하여 다음이 언제 성립하는가?

$$[T_f, T_g] = T_f T_g - T_g T_f = 0, \quad \text{or} \quad T_f T_g = T_g T_f.$$

어렵지않아요 : They are commuting if

- $f, g \in H^2$. ($T_f T_g = T_{fg} = T_g T_f$)
- $\bar{f}, \bar{g} \in H^2$. ($T_{\bar{f}} T_{\bar{g}} = T_{\bar{g}} T_{\bar{f}} \Rightarrow T_{\bar{f}}^* T_{\bar{g}}^* = T_{\bar{g}}^* T_{\bar{f}}^* \Rightarrow T_f T_g = T_g T_f$).
- $f = \alpha g + \beta$.
- 위의 역은 성립하나요?

Commuting problem

특별히 $N = 2$, $f = f_1 = -g_2$, $g = g_1 = f_2$ 경우를 생각하자.

Question (교환성 문제)

두 기호 f, g 에 대하여 다음이 언제 성립하는가?

$$[T_f, T_g] = T_f T_g - T_g T_f = 0, \quad \text{or} \quad T_f T_g = T_g T_f.$$

어렵지않아요 : They are commuting if

- $f, g \in H^2$. ($T_f T_g = T_{fg} = T_g T_f$)
- $\bar{f}, \bar{g} \in H^2$. ($T_{\bar{f}} T_{\bar{g}} = T_{\bar{g}} T_{\bar{f}} \Rightarrow T_{\bar{f}}^* T_{\bar{g}}^* = T_{\bar{g}}^* T_{\bar{f}}^* \Rightarrow T_f T_g = T_g T_f$).
- $f = \alpha g + \beta$.
- 위의 역은 성립하나요?

Commuting problem

- 두 기호의 푸리에 급수전개를 생각하자.

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}, \quad g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta}.$$

앞에서 사용한 방법을 이용하면

$$\bullet T_f T_g = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \cdots \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \ddots \\ b_2 & b_1 & b_0 & b_{-1} & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Commuting problem

- 두 기호의 푸리에 급수전개를 생각하자.

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}, \quad g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\theta}.$$

앞에서 사용한 방법을 이용하면

$$\bullet T_f T_g = \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \cdots \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \ddots \\ b_2 & b_1 & b_0 & b_{-1} & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Commuting problem

$$\bullet T_g T_f = \begin{bmatrix} b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \cdots \\ b_1 & b_0 & b_{-1} & b_{-2} & \ddots \\ b_2 & b_1 & b_0 & b_{-1} & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \ddots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \ddots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Product problem

- 교환조건 $T_f T_g = T_g T_f$ 에 의하여, 각 $i, j \geq 0$ 에 대하여

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{i-k} b_{k-j} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{i-k} a_{k-j}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{i+1-k} b_{k-j-1} = \sum_{k=0}^{\infty} b_{i+1-k} a_{k-j-1}$$

$$a_{i+1} b_{-j-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{i-k} b_{k-j} = b_{i+1} a_{-j-1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_{i-k} a_{k-j}$$

$$a_{i+1} b_{-j-1} = b_{i+1} a_{-j-1}, \quad i, j \geq 0.$$

Commuting problem

위에서 몇 가지 경우를 생각해주면 다음을 얻는다.

Theorem (Brown-Halmos(64), Axler-Cuckovic(91))

두 기호 f, g 에 대하여

$$T_f T_g = T_g T_f$$

이기 위한 필요충분조건은 다음 중의 하나가 성립함이다.

- (a) $f, g \in H^2$.
- (b) $\bar{f}, \bar{g} \in H^2$.
- (c) $\alpha f + \beta g$: 상수 함수.

Zero sum product problem

일반적으로 다른 방법을 이용하여 다음이 성립함이 알려졌다.

Theorem (Lee, 08)

기호들 $f_1, \dots, f_N, g_1, \dots, g_N$ 에 대하여

$$T_{f_1} T_{g_1} + T_{f_2} T_{g_2} + \dots + T_{f_N} T_{g_N} = 0$$

이기위한 필요충분조건은 다음이 성립함이다.

(a) $f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_N g_N = 0.$

(b) $\sum_{j=1}^N [P(f_j)][\overline{P(\bar{g}_j)}] : \text{조화함수}.$

Zero sum product problem

조건 (b)에 관하여 다음의 일반적인 문제를 생각해 볼수 있다.

Question

단위 원판에서 해석적인 함수들 g_j, h_j 에 대하여 다음의 함수가 언제 조화함수인가?

$$\sum_{j=1}^N g_j \overline{h_j}.$$

- 함수 f 가 조화함수라고 함은

$$\Delta f(x, y) := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0, \quad z = (x, y)$$

을 만족할때를 말한다.

Zero sum product problem

- $N = 1$ 인 경우 :

$$\Delta[g_1 \overline{h_1}] = g_1' \overline{h_1'}.$$

$$\begin{aligned} \therefore g_1 \overline{h_1} : \text{조화함수} &\iff g_1 : \text{상수함수} \text{ 또는 } h_1 : \text{상수함수} \\ &\iff [g_1 - g_1(0)][\overline{h_1 - h_1(0)}] = 0. \end{aligned}$$

- (위의 과정에서 해석함수에 관한 “항등정리(identity theorem)”을 사용할 수 있다.)

Zero sum product problem

- $N = 2$ 인 경우 (비슷한 계산에 의해) :

$g_1 \bar{h}_1 + g_2 \bar{h}_2$: 조화함수이기위한 필요충분조건은 OFSH:

(a) h_1, h_2 : 상수함수

(b) g_1, g_2 : 상수함수

(c) $\alpha(g_1 + \bar{h}_2) + \beta(-g_2 + \bar{h}_1)$: 상수함수

Zero sum product problem

일반적으로 다음이 알려졌다.

Theorem (Choe-Koo-Lee, 08)

단위 원판에서 해석적인 함수들 g_j, h_j 에 대하여

$$\sum_{j=1}^N g_j \overline{h_j}.$$

가 조화함수이기위한 필요충분조건은

$$\sum_{j=1}^N [g_j - g_j(0)] [\overline{h_j - h_j(0)}] = 0.$$

관심분야

- 함수공간(Hardy space, (harmonic) Bergman space, Dirichlet space)에서 여러 작용소(Toeplitz operator, Hankel operator) 생각.
- 이 작용소들에 대한 대수적 문제(boundedness, compactness, product problem, finite rank problem 등) 생각.
- 문제 해결을 위해 함수론(real-complex function theory)의 여러 성질들 이용.

감사합니다!!

영어론, Thank you!!

감사합니다!!

영어론, Thank you!!